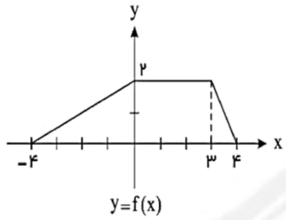
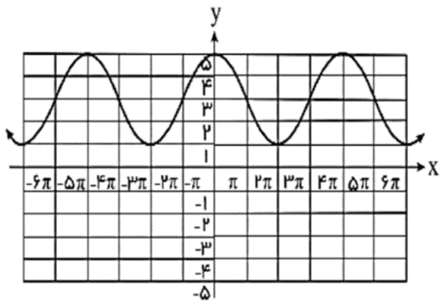
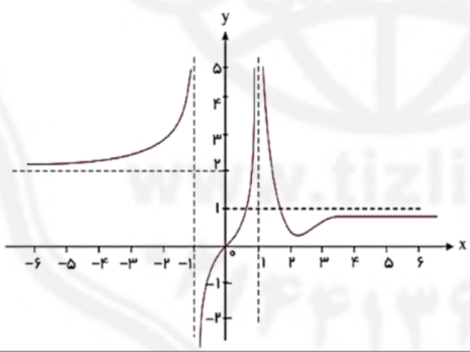
۱	مشخص کنید کدام‌یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟ الف) اگر $f(x)=x^{۲}-۴$ و $g(x)=\sqrt{x^{۲}-۴}$؛ آنگاه $(fog)(۵)=-۲۵$. ب) برای دو تابع f و g که $f\neq g$ تساوی $(fog)(x)=(gof)(x)$ هیچ‌وقت برقرار نیست. پ) اگر $f(۷)=۵$ و $g(۴)=۷$، آنگاه $(fog)(۴)=۵$. ت) اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=۲x-۱$، آنگاه $(fog)(۵)=g(۲)$.	۱
۲	با استفاده از نمودار تابع $y=f(x)$، نمودار $y=\frac{۱}{۲}f(۴x)$ را رسم کنید.  	۱
۳	اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=۲x^{۲}-۱$ باشد، دامنهٔ تابع $fog(x)$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.	۱/۵
۴	اگر $f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳$ و $g(x)=x^{۳}$ باشد، مقدار $g^{-۱}of^{-۱}(۵)$ را به‌دست آورید.	۱
۵	ضابطهٔ تابع وارون توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید. دامنه و برد هر تابع و وارون آن را با استفاده از نمودار مشخص کنید. $g(x)=۱+\sqrt{x-۲}$	۱/۵
۶	فرض کنید $\cos\alpha=\frac{۵}{۱۳}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید. الف) $\cos ۲\alpha$ ب) $\sin ۲\alpha$	۱/۵
۷	الف) دورهٔ تناوب و مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع $y=۲-۳\sin ۴x$ را به‌دست آورید. ب) دامنهٔ تابع $f(x)=\tan(۲x)$ را به‌دست آورید.	۱/۵
۸	**کدامیک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟** **الف- تابع تانژانت در دامنه اش صعودی است.** **ب- می توان بازه ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد.** **پ-می توان بازه ای یافت که تابع تانژانت در آن غیرصعودی باشد.** **ت- تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.**	۱

پایه‌های چهارم تا دوازدهم

امتحان نوبت اول ریاضی دوازدهم ۱۴۰۰
سری ۴

بارم	سؤال	ردیف
۱/۵	نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطهٔ $y = a\cos bx + c$ است. با توجه به نمودار، ضابطهٔ آن را مشخص کنید.  	۹
۱/۵	معادلهٔ مثلثاتی $\cos x(2\cos x - 9) = 5$ را حل کنید.	۱۰
۲	حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. الف $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{2x^3 - 13x^2 + 24x - 9}$ ب $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x - \sqrt{x}}{x^2 + x - 2}$	۱۱
۱/۵	نمودار تابع f به شکل مقابل است. حدود خواسته شده را بنویسید: الف) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ ت) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to (-1)^-} f(x)$ ث) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ پ) $\lim\limits_{x\to (-1)^+} f(x)$ ج) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$  	۱۲
۲	حدهای زیر را تعیین کنید. الف $\lim\limits_{x\to -6} \dfrac{9}{(x+6)^2}$ ب $\lim\limits_{x\to (-2)^-} \dfrac{-3x}{x^2 - 4}$ پ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x$	۱۳

		ت $\lim\limits_{x\to ۳^-} \dfrac{[x]-۳}{x-۳}$	
۱۴		حدود زیر را محاسبه کنید. الف $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{۲x^۳-۵x+۴}{۷x^۳-۱۱x^۲-۶x}$ ب $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{۵x+۴}{x^۳+x-۸}$ پ $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-۴x^۷+۵x^۲}{۲x^۳+۹}$	۱/۵

موفق باشید...

امتحان نوبت اول ریاضی دوازدهم ۱۴۰۰
سری ۴

۱ – الف)این مورد نادرست است. زیرا حاصل $fog(۵)$ برابر ۱۷ است نه ۲۵–.

$$\begin{cases} f(x)=x^{۲}-۴ \\ g(x)=\sqrt{x^{۲}-۴} \end{cases} \rightarrow fog(۵)=f(\underbrace{g(۵)}_{g(۵)=\sqrt{۲۵-۴}=\sqrt{۲۱}})=f(\sqrt{۲۱})=(\sqrt{۲۱})^{۲}-۴=۲۱-۴=۱۷$$

ب)این مورد هم نادرست است. چراکه با فرض $f(x)=\frac{۱}{x}$ و $g(x)=x$ شرط $f\neq g$ برای هر $x\neq\pm۱$ برقرار بوده و داریم:

$$fog(x)=f(g(x))=f(x)=\frac{۱}{x}\ ,\ gof(x)=g(f(x))=g(\frac{۱}{x})=\frac{۱}{x}$$

می‌بینیم که علی‌رغم برابر نبودن f و g توابع fog و gof برابرند.

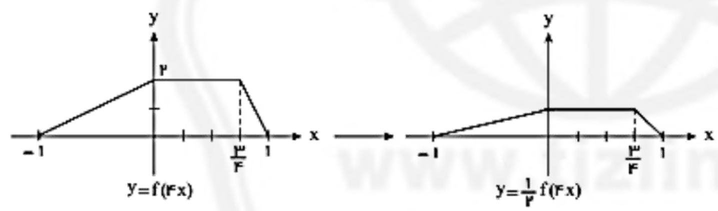
پ)این مورد درست است. زیرا $fog(۴)=f(\underbrace{g(۴)}_{۷})=f(۷)=۵$

ت)این مورد نیز درست است. زیرا:

$$fog(۵)=f(g(۵))\xrightarrow[g(۵)=۲(۵)-۱=۹]{g(x)=۲x-۱}f(۹)\xrightarrow{f(x)=\sqrt{x}}\sqrt{۹}=۳$$

از طرف دیگر با توجه به $g(x)=۲x-۱$، $g(۲)=۲(۲)-۱=۳$ می‌باشد. یعنی تساوی $fog(۵)=g(۲)$ برقرار است.

۲ – کافی است طول نقاط را $\frac{۱}{۴}$ برابر کرده و سپس عرض نقاط را نصف کنیم.



۳ –

$$f(x)=\sqrt{x-۱}\rightarrow D_f: x-۱\geq ۰\rightarrow x\geq ۱$$

$$g(x)=۲x^{۲}-۱\rightarrow D_g=\mathbb{R}$$

$$D_{fog}=\{x|x\in D_g, g(x)\in D_f\}=\{x|x\in\mathbb{R}, ۲x^{۲}-۱\geq ۱\}=\{x|x\in\mathbb{R}, ۲x^{۲}\geq ۲\}=\{x|x\in\mathbb{R}, x^{۲}\geq ۱\}$$

$= x\geq ۱$ یا $x\leq -۱ = (-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$

۴ – می‌دانیم اگر $f(a)=b$ باشد، آن‌گاه $f^{-۱}(b)=a$ است.

$$g^{-۱}of^{-۱}(۵)=g^{-۱}(f^{-۱}(۵))=g^{-۱}(۶۴)=۴$$

علت: $\begin{cases} f^{-1}(5) = \alpha \rightarrow f(\alpha) = 5 \rightarrow \frac{1}{8}\alpha - 3 = 5 \rightarrow \frac{1}{8}\alpha = 8 \rightarrow \alpha = 64 \\ g^{-1}(64) = \beta \rightarrow g(\beta) = 64 \rightarrow \beta^3 = 64 \rightarrow \beta = 4 \end{cases}$

۵-

الف

$$g(x) = 1 + \sqrt{x-2} \rightarrow y = 1 + \sqrt{x-2} \xrightarrow{-1} y - 1 = \sqrt{x-2} \xrightarrow[(x \geq 2)]{\text{به توان } 2} (y-1)^2 = x - 2$$

$$\rightarrow x = (y-1)^2 + 2 \longrightarrow f^{-1}(x) = (x-1)^2 + 2$$

$$\begin{cases} D_f \text{ برای } : x - 2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2 \rightarrow D_f = [2, +\infty) = R_{f^{-1}} \\ R_f \text{ برای } : y = 1 + \underbrace{\sqrt{x-2}}_{\min=0} \rightarrow \min(y) = 1 + 0 = 1 \rightarrow y \geq 1 \rightarrow R_f = [1, +\infty) = D_{f^{-1}} \end{cases}$$

۶-

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} \rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{12}{13} \xrightarrow{\alpha \text{ حاده است}} \sin\alpha = \frac{12}{13}$$

الف) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2(\frac{25}{169}) - 1 = \frac{50}{169} - 1 = \frac{-119}{169}$

ب) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2(\frac{12}{13})(\frac{5}{13}) = \frac{120}{169}$

۷- الف)

$$y = a\sin bx + c \rightarrow \begin{cases} T = \frac{2\pi}{|b|} \\ Max = |a| + c \\ Min = -|a| + c \end{cases}$$

پس:

$$T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$Max = |a| + c = |-3| + 2 = 3 + 2 = 5$$

$$Min = -|a| + c = -|-3| + 2 = -3 + 2 = -1$$

ب)

$$y = \tan f(x) \rightarrow f(x) \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$$

پس:

$$f(x) = \tan 2x \rightarrow 2x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

۸-

الف نادرست، تابع تانژانت در دامنه‌اش غیریکنواست.

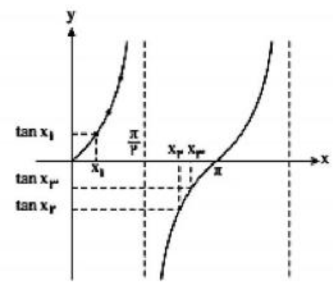
ب نادرست، تابع تانژانت در هیچ بازه‌ای نزولی نمی‌باشد.

پ درست، به‌عنوان مثال با توجه به نمودار تانژانت اگر بازهٔ $[0, \pi]$ را در نظر بگیریم داریم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \tan x_1 > \tan x_2$$

بنابراین تابع تانژانت در این بازه غیرصعودی است. توجه کنید که این بدان معنی نیست که تابع تانژانت در این بازه نزولی است زیرا برای x_2 و x_3 از این بازه داریم:

$$x_2 < x_3 \Rightarrow \tan x_2 < \tan x_3$$



در کل تابع تانژانت در هر بازه‌ای که شامل مجانب قائم باشد، غیریکنواست.

ت درست، تابع تانژانت در هر بازه‌ای که شامل مجانب قائم نباشد یعنی بازه‌ای که تابع تانژانت در آن بازه تعریف شده باشد، صعودی (اکیداً صعودی) است.

-۹

$$c = \frac{5+1}{2} = 3$$
$$|a| = \frac{5-1}{2} = 2\,,\ a > 0\,,\ a = 2$$
$$\Rightarrow \text{دوره تناوب}: T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow y = 2\cos(\frac{x}{2}) + 3 \quad \text{یا} \quad y = 2\cos(-\frac{x}{2}) + 3$$

-۱۰

$$\cos x(2\cos x - 9) = 5 \rightarrow 2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0 \xrightarrow{\cos x = A} 2A^2 - 9A - 5 = 0$$
$$\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 81 + 40 = 121$$
$$\rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9+11}{4} = 5 \rightarrow \cos x = 5 \ \text{(امکان ندارد)} \\ A = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9-11}{4} = -\dfrac{1}{2} \rightarrow \cos x = -\dfrac{1}{2} = \cos(\pi - \dfrac{\pi}{3}) = \cos\dfrac{2\pi}{3} \xrightarrow{\cos x = \cos\alpha \rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha} x = 2k\pi \pm \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$$

-۱۱

الف

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^3 - 13x^2 + 24x - 9} = \frac{0}{0} \ \text{مبهم}$$

برای رفع ابهام، مخرج را بر عامل ابهام یعنی $x - 3$ تقسیم می‌کنیم و برای تجزیهٔ صورت از اتحاد جملهٔ مشترک کمک می‌گیریم.

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 - 13x^2 + 24x - 9 & x - 3 \\ \hline & 2x^2 - 7x + 3 \end{array}$$
$$\underline{-2x^3 + 6x^2}$$
$$\underline{-7x^2 + 24x - 9}$$
$$\underline{7x^2 - 21x}$$
$$3x - 9$$
$$\underline{-3x + 9}$$
صفر

$$\text{پس} \lim_{x\to 3} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(2x^2 - 7x + 3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x-2}{2x^2 - 7x + 3}$$

بازای $x = 3$ مخرج صفر می‌شود پس مخرج را بر $x - 3$ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{l|l} 2x^2-7x+3 & x-3 \\ \hline -2x^2+6x & 2x-1 \\ \hline -x+3 & \\ x-3 & \\ \hline \text{صفر} & \end{array}$$

$$\text{پس: } \lim_{x\to 3}\frac{(x-2)}{(x-3)(2x-1)}\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{(x-2)}{(x-3)(2x-1)}=\dfrac{1}{(0^+)(5)}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{(x-2)}{(x-3)(2x-1)}=\dfrac{1}{(0^-)(5)}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty\end{cases}\to \text{حد ندارد}$$

ب

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2+x-2}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}$$

برای رفع ابهام، عبارت را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\text{پس } \lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2+x-2}\times\frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{(x^2+x-2)(x+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)(x+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{(x+2)(x+\sqrt{x})}=\frac{1}{(3)(2)}=\frac{1}{6}$$

۱۲-

با توجه به شکل داریم:

الف) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=2$

ب) $\lim\limits_{x\to (-1)^-} f(x)=+\infty$

پ) $\lim\limits_{x\to (-1)^+} f(x)=-\infty$

ت) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$

ث) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$

ج) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=1$

۱۳-

الف

$$\lim_{x\to -6}\frac{9}{(x+6)^2}\begin{cases}\lim\limits_{x\to (-6)^+}\dfrac{9}{(x+6)^2}=\dfrac{9}{(0^+)^2}=\dfrac{9}{0^+}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to (-6)^-}\dfrac{9}{(x+6)^2}=\dfrac{9}{(0^-)^2}=\dfrac{9}{0^+}=+\infty\end{cases}$$

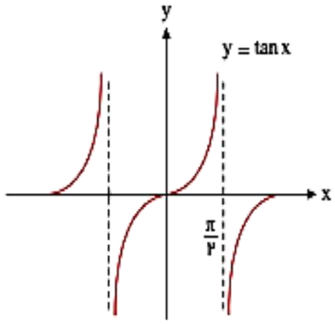
حد تابع در $x=-6$ برابر $+\infty$ است.

ب

$$\lim_{x\to (-2)^-}\frac{-3x}{x^2-4}=\frac{-3(-2)}{((-2)^-)^2-4}=\frac{6}{4^+-4}=\frac{6}{0^+}=+\infty$$

پ

به شکل توجه نمایید:



$$\Rightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^{+}} \tan x = -\infty$$

ت

$$\lim_{x\to ۳^{-}} \frac{[x]-۳}{x-۳} = \frac{[۳^{-}]-۳}{۳^{-}-۳} = \frac{۲-۳}{۰^{-}} = \frac{-۱}{۰^{-}} = +\infty$$

-۱۴

الف

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{۲x^{۳}-۵x+۴}{۷x^{۳}-۱۱x^{۲}-۶x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{۲x^{۳}}{۷x^{۳}} = \frac{۲}{۷}$$

ب

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{۵x+۴}{x^{۳}+x-۸} = \lim_{x\to -\infty} \frac{۵x}{x^{۳}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{۵}{x^{۲}} = \frac{۵}{+\infty} = ۰$$

پ

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{-۴x^{۷}+۵x^{۳}}{۲x^{۳}+۹} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-۴x^{۷}}{۲x^{۳}} = \lim_{x\to -\infty} -۲x^{۴} = -\infty$$