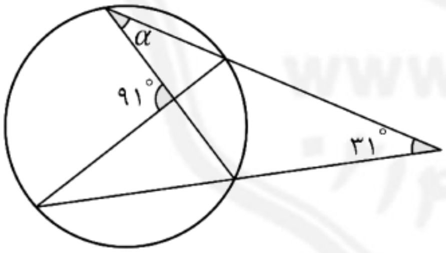
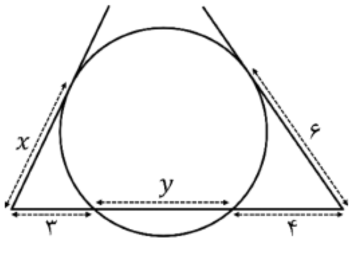
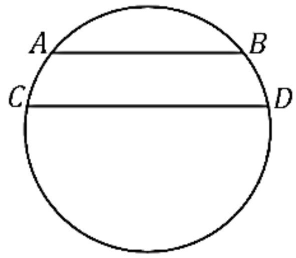
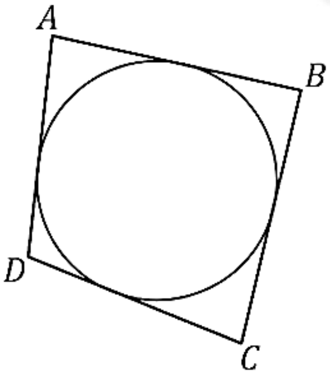
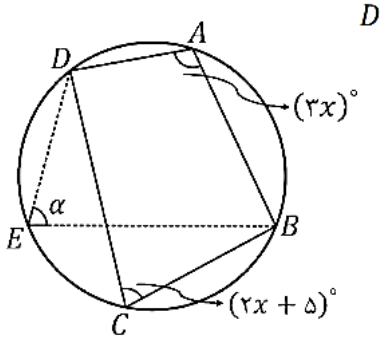
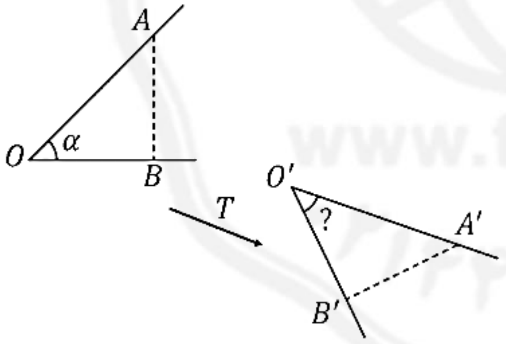
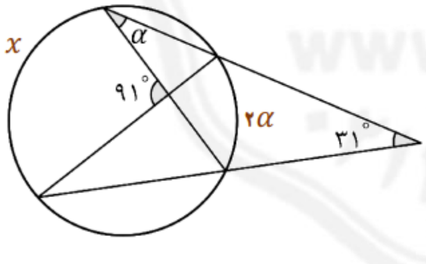
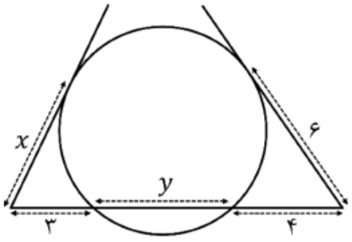
امتحان نوبت اول هندسه یازدهم ۱۴۰۲
سری ۵

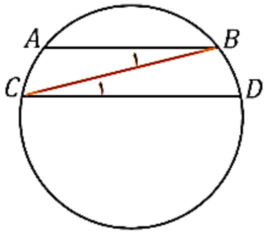
۱	**گزاره‌های درست و نادرست را مشخص کنید.** الف) مرکز دایره محاطی مثلث، نقطه همرسی سه نیم‌ساز است. ب) یک ذوزنقه محاطی است اگر و تنها اگر متساوی‌الساقین باشد. پ) اگر d خط‌المرکزین دو دایره متخارج با شعاع‌های R و R' باشد، همواره $d < R' + R$ خواهد بود. ت) بازتاب جهت شکل را حفظ می‌کند.	۱
۲	**جای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید.** الف) در دایره‌ای به شعاع ۶ واحد، قطاعی به اندازه °۱۲۰ رسم می‌کنیم؛ مساحت قطاع برابر .... است. ب) اگر فاصله مراکز دو دایره با مجموع شعاع‌های دو دایره برابر باشد $(d = R + R')$، دو دایره .... هستند. پ) در هر بازتاب، تبدیل یافته هر مثلث یک .... است که با مثلث اولیه .... (متشابه - هم‌نهشت) است.	۱
۳	**مفاهیم زیر را به طور مختصر تعریف کنید.** زاویه ظلی : .... تبدیل طولپا : .... چندضلعی محیطی : .... دایره محاطی خارجی :	۲
۴	در شکل مقابل، اندازه زاویه α را به دست آورید. 	۲
۵	در شکل مقابل، اندازه x را بیابید. 	۲

۶	در شکل مقابل وترهای AB و CD موازی هستند. ثابت کنید $\widehat{AC} = \widehat{BD}$.  	۱.۵
۷	دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۷ سانتی‌متر با خط‌المرکزین ۱۲ سانتی‌متر مفروض هستند. طول مماس مشترک داخلی و مماس مشترک خارجی را پیدا کنید و با رسم شکلی مناسب، این دو مماس و وضعیت دو دایره نسبت به هم را نشان دهید.	۲
۸	در مثلث قائم‌الزاویه‌ای با اضلاع ۵ ، ۱۲ و ۱۳ ، شعاع بزرگ‌ترین دایره محاطی خارجی را به دست آورید.	۱.۵
۹	ثابت کنید چهارضلعی $ABCD$ محیطی خواهد بود اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر باشد. به عبارتی دیگر : $AB + CD = AB + BC$  	۱.۵

۱۰	در دایره مقابل، $\hat{A} = (۳x)^\circ$ و $\hat{C} = (۲x + ۵)^\circ$ است. اندازه زاویه $D\hat{E}B$ را به دست آورید.  	۲
۱۱	اگر r_a، r_b و r_c شعاع‌های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد، نشان دهید : $\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{۱}{r}$	۲
۱۲	نشان دهید در هر تبدیل طولپا (ایزومتری) مانند T، اندازه زاویه حفظ می‌شود.  	۱.۵

۱	**گزاره‌های درست و نادرست را مشخص کنید.** الف) مرکز دایره محاطی مثلث، نقطه همرسی سه نیم‌ساز است. (صحیح) ب) یک ذوزنقه محاطی است اگر و تنها اگر متساوی‌الساقین باشد. (صحیح) پ) اگر d خط‌المرکزین دو دایره متخارج با شعاع‌های R و R' باشد، همواره $d < R' + R$ خواهد بود. (نادرست) ت) بازتاب جهت شکل را حفظ می‌کند. (نادرست)	۱
۲	**جای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید.** الف) در دایره‌ای به شعاع ۶ واحد، قطاعی به اندازه °۱۲۰ رسم می‌کنیم؛ مساحت قطاع برابر ۱۲π است. ب) اگر فاصله مراکز دو دایره با مجموع شعاع‌های دو دایره برابر باشد $(d = R + R')$ ، دو دایره مماس برون هستند. پ) در هر بازتاب، تبدیل یافته هر مثلث یک مثلث است که با مثلث اولیه همنهشت (متشابه – هم‌نهشت) است.	۱
۳	**مفاهیم زیر را به طور مختصر تعریف کنید.** زاویه ظلی : زاویه‌ای که راس آن روی دایره باشد و یکی از اضلاع آن مماس و دیگری وتری از دایره باشد. تبدیل طولپا : تبدیل‌هایی که طول پاره‌خط را حفظ می‌کنند، تبدیلات طولپا نامیده می‌شوند. چندضلعی محیطی : چندضلعی را محیطی می‌نامیم اگر دایره‌ای باشد که بر همه ضلع‌های آن چندضلعی مماس باشد. دایره محاطی خارجی : دایره محاطی خارجی یك مثلث، دایره‌ای است که در خارج از مثلث قرار داشته و بر یکی از اضلاع مثلث و همچنین ادامه دو ضلع دیگرش مماس باشد.	۲
۴	در شکل مقابل، اندازه زاویه α را به دست آورید.  $\begin{cases} \frac{x - ۲\alpha}{۲} = ۳۱^\circ \\ \frac{x + ۲\alpha}{۲} = ۹۱^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - ۲\alpha = ۶۲^\circ \\ x + ۲\alpha = ۱۸۲^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + ۲\alpha = -۶۲^\circ \\ x + ۲\alpha = ۱۸۲^\circ \end{cases}$ $\xRightarrow{\text{جمع دو سطر}} ۴\alpha = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۳۰^\circ$	۲
۵	در شکل مقابل، اندازه x را بیابید.  $\begin{cases} ۶^۲ = ۴(۴ + y) \ (\text{نتیجه ۱}) \\ x^۲ = ۳(۳ + y) \ (\text{نتیجه ۲}) \end{cases} \xRightarrow{\text{از نتیجه ۱}} y = ۵$ و با جای گذاری $y = ۵$ در نتیجه ۲ ، $x = \sqrt{۲۴}$ را خواهیم داشت.	۲

۶ در شکل مقابل وترهای AB و CD موازی هستند. ثابت کنید $\widehat{AC} = \widehat{BD}$. **۱.۵**

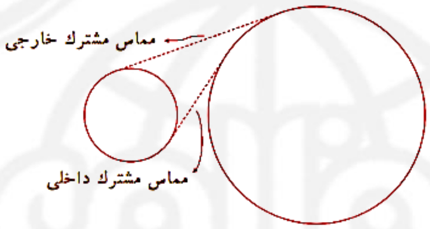


از B به C وصل می‌کنیم. چون $AB \parallel CD$ ، طبق قضیه خطوط موازی و مورب، $\hat{B}_۱ = \hat{C}_۱$ خواهد بود. این دو زاویه محاطی هستند، پس :

$$\hat{B}_۱ = \hat{C}_۱ \Rightarrow \frac{\widehat{AC}}{۲} = \frac{\widehat{BD}}{۲} \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$$

۷ دو دایره به شعاع‌های ۳ و ۷ سانتی‌متر با خط‌المرکزین ۱۲ سانتی‌متر مفروض هستند. طول مماس مشترک داخلی و مماس مشترک خارجی را پیدا کنید و با رسم شکلی مناسب، این دو مماس و وضعیت دو دایره نسبت به هم را نشان دهید. **۲**

$$\begin{cases} \text{مماس داخلی} = \sqrt{d^۲ - (R + R')^۲} \\ \text{مماس خارجی} = \sqrt{d^۲ - (R - R')^۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{مماس داخلی} = \sqrt{۱۲^۲ - (۱۰)^۲} \\ \text{مماس خارجی} = \sqrt{۱۲^۲ - (۴)^۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{مماس داخلی} = \sqrt{۴۴} \\ \text{مماس خارجی} = \sqrt{۱۲۸} \end{cases}$$



وضعیت دو دایره نسبت به هم : متخارج

* در این دو دایره، یك مماس مشترك داخلی و یك مماس مشترك خارجی دیگر نیز داریم که نوشتن آن‌ها نیز جزو اهداف سوال نبوده و فقط نشان‌دادن جایگاه یکی از هر نوع مماس مشترك در دو دایره خواسته مسئله از دانش‌آموز بوده است.

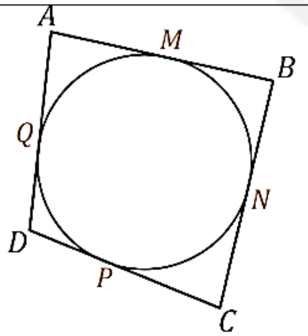
۸ در مثلث قائم‌الزاویه‌ای با اضلاع ۵ ، ۱۲ و ۱۳ ، شعاع بزرگ‌ترین دایره محاطی خارجی را به دست آورید. **۱.۵**

بزرگ‌ترین دایره محاطی خارجی، نظیر بزرگ‌ترین ضلع مثلث است، پس :

$$r = \frac{S}{P - ۱۳} \Rightarrow r = \frac{\frac{۱}{۲}(۵)(۱۲)}{\left(\frac{۵ + ۱۲ + ۱۳}{۲}\right) - ۱۳} = \frac{۳۰}{۲} = ۱۵$$

* ۵ ، ۱۲ و ۱۳ اضلاع یك مثلث قائم‌الزاویه هستند، پس مساحت این مثلث برابر نصف حاصل‌ضرب دو ضلع قائم آن می‌باشد.

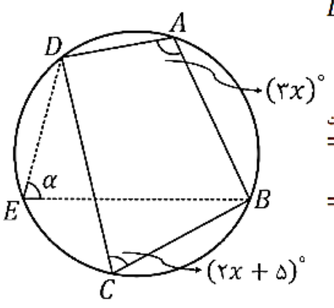
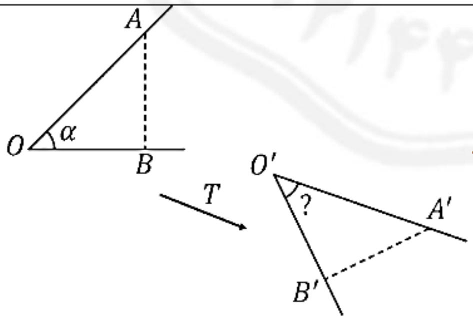
۹ ثابت کنید چهارضلعی $ABCD$ محیطی خواهد بود اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر باشد. به عبارتی دیگر : **۱.۵**



$$AB + CD = AD + BC$$

$ABCD$ محیطی است، پس دایره‌ای وجود دارد که به همه اضلاع آن مماس باشد. این وضعیت را در شکل روبه‌رو مشاهده می‌کنید. از قبل می‌دانیم که اگر از نقطه‌ای خارج دایره، بر آن دایره مماس رسم کنیم، طول این مماس‌ها با هم برابر است، پس :

$$\begin{aligned} AB + CD &= (AM + BM) + (DP + CP) = (AQ + BN) + (DQ + CN) \\ &= (AQ + DQ) + (BN + CN) = AD + BC \end{aligned}$$

۱۰	در دایره مقابل، $\hat{A}=(۳x)^\circ$ و $\hat{C}=(۲x+۵)^\circ$ است. اندازه زاویه $D\hat{E}B$ را به دست آورید.  $\xRightarrow{ABCD\ \text{محاطی است}} \hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۳x+۲x+۵=۱۸۰$ $\Rightarrow x=۳۵^\circ$ پس $\hat{A}=۱۰۵^\circ$ است. از طرفی دیگر، $ABED$ محاطی است، در نتیجه : $\hat{A}+\hat{E}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۰۵^\circ+\alpha=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha=۷۵^\circ$	۲
۱۱	اگر r_a، r_b و r_c شعاع‌های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی باشد، نشان دهید : $\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{۱}{r}$ اندازه شعاع‌های دوایر محاطی خارجی مثلث برابر هستند با : $r_a=\frac{S}{P-a}\ ,\ r_b=\frac{S}{P-b}\ ,\ r_c=\frac{S}{P-c}$ با معکوس و جمع کردن سه تساوی فوق، خواهیم داشت : $\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}=\frac{P-a}{S}+\frac{P-b}{S}+\frac{P-c}{S}=\frac{۳P-۲P}{S}=\frac{P}{S}$ که این مقدار هم با توجه به تساوی $r=\frac{S}{P}$، برابر $\frac{۱}{r}$ خواهد بود.	۲
۱۲	نشان دهید در هر تبدیل طولپا (ایزومتری) مانند T، اندازه زاویه حفظ می‌شود.  فرض کنید سه نقطه A، O و B را تحت تبدیل T نظیر نقاط A'، O' و B' کنیم. یعنی : $T(A)=A'\ ,\ T(B)=B'\ ,\ T(O)=O'$ چون T طولپاست، یعنی فاصله‌ها و طول پاره‌خط‌ها را ثابت نگه می‌دارد، بنابراین : $\begin{cases} OA=O'A' \\ OB=O'B' \\ AB=A'B' \end{cases} \xRightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta OAB \cong \Delta O'A'B' \Rightarrow \hat{O}=\hat{O'}$ بنابراین در هر تبدیل طولپا، تبدیل یافته هر زاویه، زاویه‌ای هم‌اندازه آن است.	۱.۵