۱- فرض کنید S مجموعه‌ای n عضوی است. می‌خواهیم مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های S را به m دسته افراز کنیم به نحوی که هرگاه A، B و $A \cup B$ در یک دسته باشند آن‌گاه $A = B$. حداقل مقدار m را بیابید. (منظور از افراز یک مجموعه به تعدادی دسته این است که هر عضو مجموعه در دقیقاً یک دسته قرار داشته باشد.)

۲- اعداد حقیقی و مثبت x، y و z با شرط $x + y + z = ۱۳۹۹$ مفروض‌اند. بیش‌ترین مقدار عبارت

$$[x]\,y + [y]z + [z]x$$

چه‌قدر است؟ (منظور از $[x]$ بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از x بزرگ‌تر نیست.)

۳- دایرهٔ $\omega_۱$ به مرکز $O_۱$ مفروض است. دایرهٔ $\omega_۲$ به مرکز $O_۲$ از نقطهٔ $O_۱$ می‌گذرد و $\omega_۱$ را در نقاط A و B قطع می‌کند. خطی که از A می‌گذرد و بر $\omega_۱$ مماس است را l می‌نامیم. دایره‌ای که از $O_۱$ و $O_۲$ می‌گذرد و مرکز آن روی l قرار دارد، $\omega_۲$ را برای بار دوم در P قطع می‌کند. ثابت کنید قرینهٔ P نسبت به l روی $\omega_۱$ قرار دارد.

۴- دو دایرهٔ $\omega_۱$ و $\omega_۲$ در نقاط A و B تقاطع دارند. نقطهٔ X روی $\omega_۱$ و نقطهٔ Y روی $\omega_۲$ قرار دارند به طوری‌که XY بر دو دایره مماس است و خط XY به B نزدیک‌تر از A است. قرینهٔ B نسبت به X و Y را به ترتیب C و D می‌نامیم. ثابت کنید

$$\angle CAD < ۹۰^\circ$$

۵- دوتایی (a, b) از اعداد طبیعی را مربع‌ساز گوییم هرگاه $ab + ۱$ مربع کامل باشد. تمام nهای طبیعی را بیابید که مجموعهٔ $\{۱, ۲, \dots, ۲n\}$ را بتوان به دوتایی‌های مربع‌ساز افراز کرد.

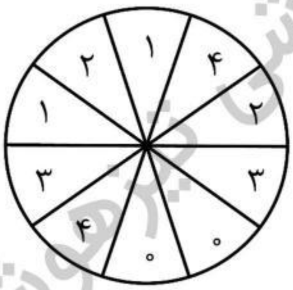
۶- دایره‌ای را به $۲n$ قطاع مساوی تقسیم کرده‌ایم. می‌خواهیم روی هر یک از آن‌ها یکی از اعداد ۰، ۱، ...، $n - ۱$ را بنویسیم به طوری‌که

۱. هر عدد دقیقاً دو بار استفاده شود.

۲. برای هر عدد طبیعی i که $۰ \le i \le n - ۱$، بین هر دو قطاع با شمارهٔ i، از یک طرف، دقیقاً i قطاع دیگر وجود داشته باشد.

در شکل روبه‌رو این کار برای $n = ۵$ انجام شده است.

ثابت کنید برای $n = ۱۳۹۹$ این کار امکان‌پذیر نیست.



سوالات و راه حل‌های مرحلهٔ دوم سی و هشتمین دورهٔ المپیاد ریاضی، ۱۳۹۹

۱. فرض کنید S مجموعه‌ای n عضوی است. می‌خواهیم مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های S را به m دسته افراز کنیم به نحوی که هرگاه A، B و $A \cup B$ در یک دسته باشند آن‌گاه $A = B$. حداقل مقدار m را بیابید. (منظور از افراز یک مجموعه به تعدادی دسته این است که هر عضو مجموعه در دقیقاً یک دسته قرار داشته باشد.)

راه حل.

جواب مسئله، $n + ۱$ است.

ابتدا فرض کنید برای دو مجموعهٔ A و B داشته باشیم $A \subset B$. از آن‌جا که $A \cup B = B$، اگر A و B در یک دسته قرار داشته باشند طبق شرط سوال نتیجه می‌شود $A = B$ که تناقض است. در نتیجه هر دو مجموعهٔ A و B که $A \subset B$، باید در دو دستهٔ مختلف قرار داشته باشند. حال مجموعه‌های $\phi, \{۱\}, \{۱, ۲\}, \ldots, \{۱, ۲, \ldots, n\}$ را در نظر بگیرید. توجه کنید که هیچ دوتایی از این مجموعه‌ها نمی‌توانند در یک دسته قرار داشته باشند زیرا هر دوتایی را در نظر بگیریم یکی زیرمجموعهٔ دیگری است. ادعا می کنیم می‌توان مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های S را به $n + ۱$ دسته با شرط مسئله افراز کرد. دسته‌ها را با شماره‌های $n, \ldots, ۱, ۰$ نام‌گذاری می‌کنیم. برای هر i طبیعی که $۰ \leq i \leq n$، همهٔ زیرمجموعه‌های i عضوی از S را در دستهٔ i قرار می‌دهیم. واضح است که هر زیرمجموعه از S در حداقل یکی از دسته‌ها قرار می‌گیرد. اگر دو مجموعهٔ متمایز A و B در یک دسته قرار داشته باشند تعداد اعضای یکسانی دارند پس B عضوی دارد که A ندارد و $A \cup B$ حداقل یک عضو بیش‌تر از A دارد. این نتیجه می‌دهد که $A \cup B$ نمی‌تواند در همان دسته قرار داشته باشد پس شرط افراز برقرار است و ادعا ثابت می‌شود.

در نتیجه حداقل مقدار m برابر با $n + ۱$ است.

۲. اعداد حقیقی و مثبت x، y و z با شرط $x + y + z = ۱۳۹۹$ مفروض‌اند. بیش‌ترین مقدار عبارت

$$[x]\, y + [y]\, z + [z]\, x \qquad (۱)$$

چه‌قدر است؟ (منظور از $[x]$ بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از x بزرگ‌تر نیست.)

راه حل اول.

جواب مسئله، ۶۵۲۴۰۰ است.

دقت کنید که

$$۳(xy + yz + zx) \leq (x + y + z)^۲ \qquad (۲)$$

زیرا اگر همهٔ عبارات را به طرف مثبت نامساوی ببریم، می‌توانیم آن را به شکل زیر بنویسیم:

$$۰ \leq \frac{۱}{۲}(x - y)^۲ + \frac{۱}{۲}(y - z)^۲ + \frac{۱}{۲}(z - x)^۲$$

که درستی آن واضح است. همچنین طبق تعریف $[x]$ داریم $[x] \leq x$، در نتیجه

$$[x]\, y + [y]\, z + [z]\, x \leq xy + yz + zx \overset{(۲)}{\leq} \frac{(x + y + z)^۲}{۳} = ۶۵۲۴۰۰ + \frac{۱}{۳} \qquad (۳)$$

فرض کنید حداقل یکی از اعداد x، y و z صحیح نباشد. از آن‌جا که $x + y + z$ صحیح است مجموع جزء اعشاری x، y و z حداقل ۱ است پس جز اعشاری یکی از آن‌ها حداقل $\frac{۱}{۳}$ است. این نتیجه می‌دهد که

$$[x]\, y + [y]\, z + [z]\, x \leq ۶۵۲۴۰۰ + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۳} = ۶۵۲۴۰۰$$

اگر x، y و z هر سه اعداد صحیح باشند نیز طبق (۳) داریم

$$[x]\, y + [y]\, z + [z]\, x \leq \left[۶۵۲۴۰۰ + \frac{۱}{۳}\right] = ۶۵۲۴۰۰$$

از طرف دیگر برای $x = ۴۶۶$، $y = ۴۶۶$ و $z = ۴۶۷$ مقدار (۱) برابر با ۶۵۲۴۰۰ می‌شود پس بیش‌ترین مقدار آن ۶۵۲۴۰۰ است.

راه حل دوم.

برای هر x مثبت می‌توانیم بنویسیم $x = [x] + \{x\}$ که $\{x\}$ جزء اعشاری x است. فرض کنید حداقل یکی از اعداد x، y و z صحیح نباشد. طبق تعریف $[x]$ واضح است که $۰ \leq \{x\} < ۱$. از آن‌جا که $x+y+z$ صحیح است مجموع جزء اعشاری x، y و z باید ۱ یا ۲ باشد. (زیرا عددی طبیعی و کم‌تر از ۳ است.) رابطهٔ (۱) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$f(x,y,z) = [x][y] + [y][z] + [z][x] + [x]\{y\} + [y]\{z\} + [z]\{x\}$$

بدون کاسته‌شدن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد x بیش‌ترین مقدار را بین سه متغیر دارد. حال تعریف می‌کنیم

$$a = [x], \quad b = [y], \quad c = [z] + \{x\} + \{y\} + \{z\}$$

دقت کنید a، b و c سه عدد صحیح هستند به طوری‌که $a + b + c = ۱۳۹۹$. با حالت‌بندی روی مقدار $\{x\} + \{y\} + \{z\}$ نشان می‌دهیم $f(x,y,z) \leq f(a,b,c)$.

حالت اول. $\{x\} + \{y\} + \{z\} = ۱$.

پس $c = [z] + ۱$. این نتیجه می‌دهد که

$$f(a,b,c) = [x][y] + [y][z] + [z][x] + [x] + [y] \tag{۴}$$

از طرف دیگر داریم

$$[x]\{y\} + [y]\{z\} + [z]\{x\} \leq [x]\big(\underbrace{\{y\} + \{z\} + \{x\}}_{=۱}\big) \leq [x] + [y]$$
$$\Longrightarrow f(x,y,z) \leq [x][y] + [y][z] + [z][x] + [x] + [y] \overset{(۴)}{=} f(a,b,c)$$

حالت دوم. $\{x\} + \{y\} + \{z\} = ۲$.

اثبات مشابه حالت قبل است. دقت کنید که $c = [z] + ۲$ و این نتیجه می‌دهد

$$f(a,b,c) = [x][y] + [y][z] + [z][x] + ۲[x] + ۲[y] \tag{۵}$$

از طرف دیگر داریم

$$[x]\{y\} + [y]\{z\} + [z]\{x\} \leq [x]\big(\underbrace{\{y\} + \{z\} + \{x\}}_{=۲}\big) \leq ۲[x] + ۲[y]$$
$$\Longrightarrow f(x,y,z) \leq [x][y] + [y][z] + [z][x] + ۲[x] + ۲[y] \overset{(۵)}{=} f(a,b,c)$$

پس در هر دو حالت ادعا ثابت می‌شود. در نتیجه برای یافتن بیش‌ترین مقدار (۱) می‌توانیم فرض کنیم x،

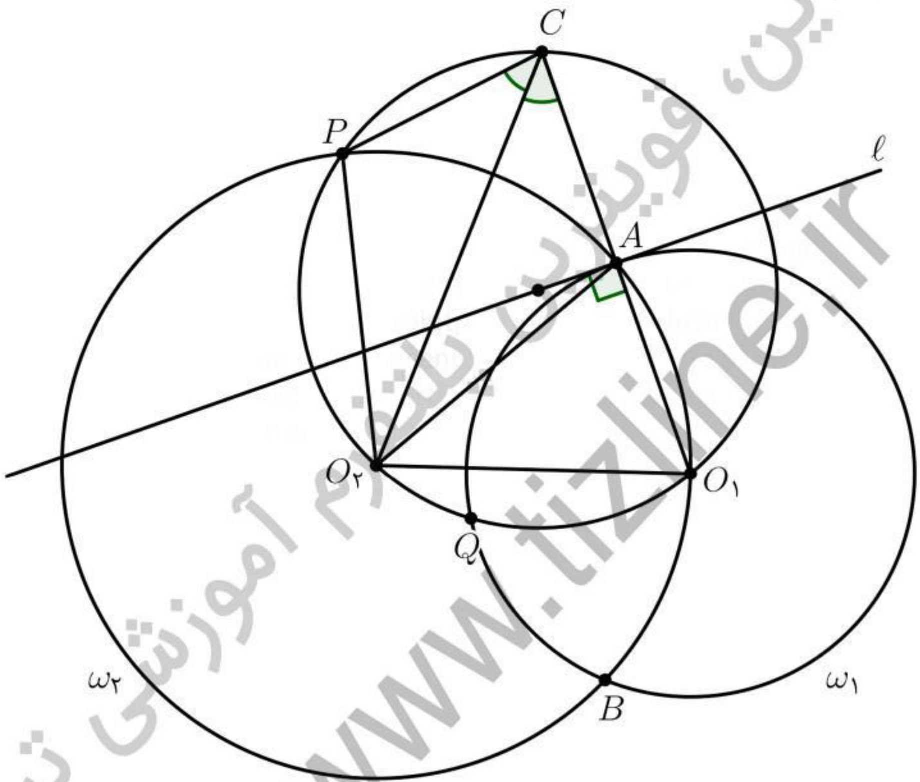
y و z اعدادی صحیح هستند. اگر $x - y \geq ۲$، به‌دست می‌آید

$$f(x-۱, y+۱, z) = (x-۱)(y+۱) + (y+۱)z + z(x-۱) = xy + x - y - ۱ + yz + zx$$

که از $f(x, y, z)$ بزرگ‌تر است. پس بیش‌ترین مقدار زمانی اتفاق می‌افتد که اختلاف هر دو متغیر حداکثر ۱ باشد. به سادگی می‌توان دید که تنها حالت ممکن $x = ۴۶۷$، $y = ۴۶۶$ و $z = ۴۶۶$ و جایگشت‌های آن است در نتیجه بیش‌ترین مقدار برابر با ۶۵۲۴۰۰ است.

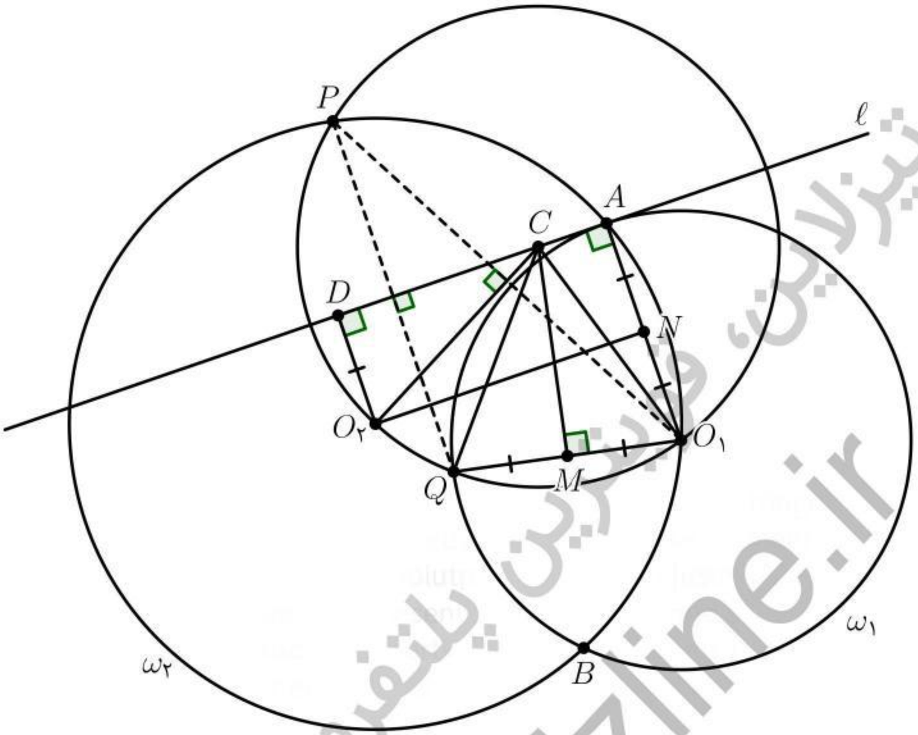
۳. دایرهٔ ω_1 به مرکز O_1 مفروض است. دایرهٔ ω_2 به مرکز O_2 از نقطهٔ O_1 می‌گذرد و ω_1 را در نقاط A و B قطع می‌کند. خطی که از A می‌گذرد و بر ω_1 مماس است را ℓ می‌نامیم. دایره‌ای که از O_1 و O_2 می‌گذرد و مرکز آن روی ℓ قرار دارد، ω_2 را برای بار دوم در P قطع می‌کند. ثابت کنید قرینهٔ P نسبت به ℓ روی ω_1 قرار دارد.

راه حل اول.



قرینهٔ نقاط P و O_1 نسبت به خط ℓ را Q و C می‌نامیم. از آن‌جا که $\ell \perp AO_1$، C روی AO_1 قرار دارد همچنین C روی دایرهٔ محیطی PO_2O_1 قرار دارد زیرا خط ℓ از مرکز آن می‌گذرد. اگر نشان دهیم $CA = CP$ آن‌گاه نتیجه می‌شود $O_1A = O_1Q$ که همان حکم سوال است. از آن‌جا که $O_2P = O_2O_1$ نتیجه می‌شود $\angle PCO_2 = \angle O_1CO_2$. دایرهٔ محیطی مثلث PCA را ω می‌نامیم. نقطهٔ O_2 از یک طرف روی نیمساز $\angle PCA$ و از طرف دیگر روی عمودمنصف PA قرار دارد، اگر $CA \neq CP$ آن‌گاه O_2 باید وسط کمان $\widehat{PA}$ از ω (کمانی که شامل راس C نیست) باشد یعنی چهارضلعی CPO_2A محاطی است که امکان ندارد زیرا A وسط CO_1 است و داخل دایرهٔ محیطی CPO_2 قرار دارد. پس فرض خلف غلط بوده و باید داشته باشیم $CP = CA$ که حکم را نتیجه می‌دهد.

راه حل دوم.



قرینهٔ نقطهٔ P نسبت به خط ℓ را Q و مرکز دایرهٔ محیطی مثلث PO_1O_2 را C می‌نامیم. طبق شرط سوال خط ℓ از C می‌گذرد پس Q روی دایرهٔ محیطی مثلث PO_1O_2 قرار دارد زیرا عمودمنصف پاره‌خط PQ از C می‌گذرد. پای عمود وارد از O_2 بر ℓ را D و پای عمود وارد از C بر O_1Q را M می‌نامیم. دقت کنید که M وسط QO_1 و CM نیم‌ساز $\angle QCO_1$ است. از آن‌جا که $CO_1 = CP$ و $O_2O_1 = O_2P$ نتیجه می‌شود CO_2 عمودمنصف پاره‌خط PO_1 است. پس $CO_2 \perp PO_1$ و $CD \perp PQ$ که نتیجه می‌دهد

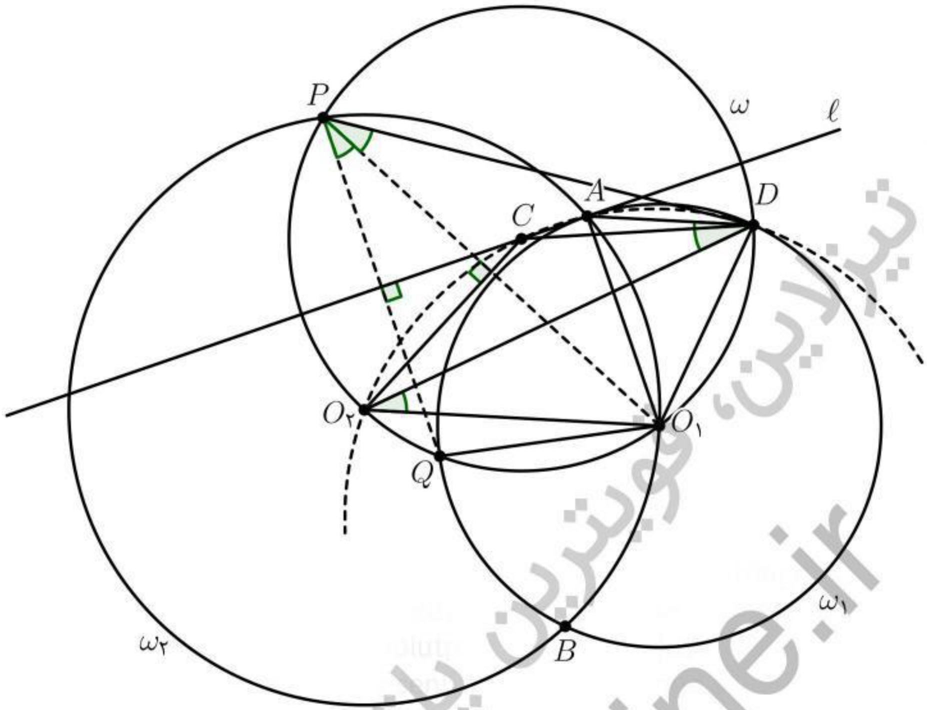
$$\angle DCO_2 = \angle QPO_1 = \frac{1}{2}\angle QCO_1 = \angle MCO_1$$

پس دو مثلث MCO_1 و DCO_2 متشابه هستند و از آن‌جا که $CO_1 = CO_2$ این دو مثلث همنهشت نیز هستند، در نتیجه $DO_2 = MO_1$. پای عمود وارد از O_2 بر AO_1 را N می‌نامیم. دقت کنید که N وسط AO_1 است زیرا مثلث AO_2O_1 متساوی‌الساقین است. از طرف دیگر واضح است که چهارضلعی $DANO_2$ مستطیل است پس

$$\frac{1}{2}AO_1 = AN = DO_2 = MO_1 = \frac{1}{2}QO_1 \implies AO_1 = QO_1$$

که نتیجه می‌دهد Q روی ω_1 قرار دارد و حکم ثابت می‌شود.

راه حل سوم.



دایره‌ای که از O_1 و O_2 می‌گذرد و مرکز آن روی ℓ قرار دارد را ω می‌نامیم. از A خطی موازی با O_1O_2 رسم می‌کنیم تا ω_1 را در نقطهٔ D قطع کند، سپس دایرهٔ محیطی مثلث ADO_2 را رسم می‌کنیم تا ℓ را برای بار دوم در C قطع کند. ادعا می‌کنیم که C مرکز دایرهٔ محیطی مثلث DO_1O_2 است. از توازی AD و O_1O_2 و تساوی $O_2A = O_2O_1$ نتیجه می‌شود

$$\angle DAO_1 = \angle AO_1O_2 = \angle O_2AO_1 \qquad (1)$$

پس AO_1 نیم‌ساز $\angle O_2AD$ است و از آن‌جا که $\ell \perp AO_1$ نتیجه می‌شود ℓ نیم‌ساز خارجی $\angle O_2AD$ است پس C باید وسط کمان $\widehat{O_2AD}$ باشد. از این هم نتیجه می‌شود $CD = CO_2$. حال اگر نشان دهیم $\angle O_2CD = 360^\circ - 2\angle O_2O_1D$ ادعا ثابت می‌شود. دقت کنید که

$$\angle O_2CD = \angle O_2AD = \angle DAO_1 + \angle O_2AO_1 \overset{(1)}{=} 2\angle DAO_1 \qquad (2)$$

و

$$\angle O_2O_1D = \angle O_2O_1A + \angle AO_1D = \angle DAO_1 + 180^\circ - 2\angle DAO_1 = 180^\circ - \angle DAO_1 \qquad (3)$$

از دو تساوی (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که $\angle O_2CD = 360^\circ - 2\angle O_2O_1D$ و ادعا ثابت می‌شود. از آن‌جا که $CO_1 = CO_2$ و C روی ℓ قرار دارد، C باید مرکز ω باشد و این یعنی D نیز روی ω قرار دارد. قرینهٔ نقطهٔ P نسبت به خط ℓ را Q می‌نامیم. مانند راه حل دوم نتیجه می‌شود Q روی ω قرار دارد، همچنین

$PO_1 \perp CO_2$ و $PQ \perp CA$. پس داریم

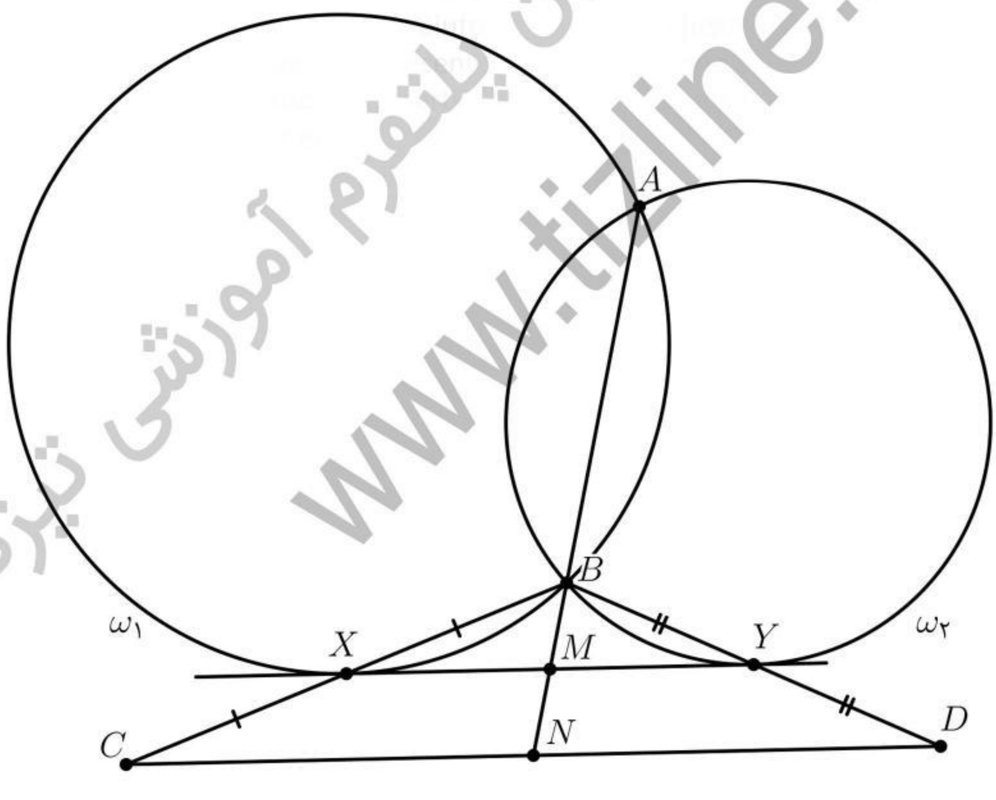
$$\angle QPO_1 = 180^\circ - \angle ACO_2 = \angle ADO_2 = \angle DO_2O_1 = \angle DPO_1$$

این تساوی نتیجه می‌دهد $O_1D = O_1Q$ پس Q روی ω_1 قرار دارد و حکم ثابت می‌شود.

۴. دو دایرهٔ ω_1 و ω_2 در نقاط A و B تقاطع دارند. نقطهٔ X روی ω_1 و نقطهٔ Y روی ω_2 قرار دارد طوری‌که XY بر دو دایره مماس است و خط XY به B نزدیک‌تر از A است. اگر قرینهٔ B نسبت به X و Y را به ترتیب C و D بنامیم، ثابت کنید

$$\angle CAD < 90^\circ$$

راه حل.



فرض کنید خط AB خطوط XY و CD را به ترتیب در M و N قطع کند. طبق قوت M نسبت به ω_1 و ω_2 داریم

$$MX^2 = MB \cdot MA = MY^2 \implies MX = MY$$

از طرف دیگر طبق عکس قضیهٔ تالس داریم $CD \parallel XY$. از آن‌جا که M وسط پاره‌خط XY است طبق قضیهٔ تالس نتیجه می‌شود N نیز وسط پاره‌خط CD است. برای نشان دادن $\angle CAD < ۹۰^\circ$ کافی است ثابت کنیم نقطهٔ A خارج از دایرهٔ به قطر CD قرار دارد یا معادلاً $NA > NC$. از قضیهٔ تالس نتیجه می‌شود

$$NA = NM + MA = MB + MA, \quad NC = ۲MX$$

پس باید نشان دهیم $MB + MA > ۲MX$. با استفاده از قوت M نسبت به دایرهٔ $\omega_۱$ و نامساوی حسابی-هندسی داریم

$$MX^۲ = MB \cdot MA \le \left(\frac{MB + MA}{۲}\right)^۲ \implies MB + MA \ge ۲MX$$

دقت کنید که تساوی نامساوی حسابی-هندسی تنها زمانی رخ می‌دهد که $MB = MA$ اما در این‌جا واضح است که $MA > MB$ پس حالت تساوی نمی‌تواند اتفاق بیفتد و حکم ثابت می‌شود.

۵. دوتایی (a, b) از اعداد طبیعی را مربع‌ساز گوییم هر گاه $ab + ۱$ مربع کامل باشد. تمام nهای طبیعی را بیابید که مجموعهٔ $\{۱, ۲, \dots, ۲n\}$ را بتوان به دوتایی‌های مربع‌ساز افراز کرد.

راه حل.

جواب مسئله، nهای زوج است.

ابتدا نشان می‌دهیم اگر n زوج باشد می‌توان مجموعهٔ $\{۱, ۲, \dots, ۲n\}$ را به جفت‌های مربع‌ساز افراز کرد. فرض می‌کنیم $n = ۲m$. اکنون برای هر عدد صحیح $۰ \le k \le m - ۱$، دو زوج $(۴k + ۲, ۴k + ۴)$ و $(۴k + ۱, ۴k + ۳)$ را در نظر بگیرید. مجموعهٔ این زوج‌ها، اعداد $\{۱, ۲, \dots, ۲n\}$ را افراز می‌کنند و هر زوج نیز مربع‌ساز است زیرا

$$(۴k + ۲)(۴k + ۴) + ۱ = (۴k + ۳)^۲, \quad (۴k + ۱)(۴k + ۳) + ۱ = (۴k + ۲)^۲$$

حال نشان می‌دهیم اگر n فرد باشد نمی‌توان مجموعهٔ $\{۱, ۲, \dots, ۲n\}$ را به دوتایی‌های مربع‌ساز افراز کرد.

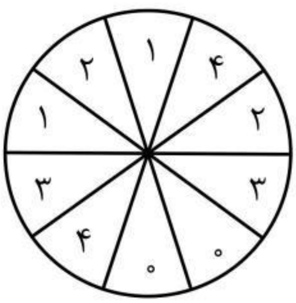
فرض کنید a عددی باشد که باقی‌ماندهٔ آن بر ۴ برابر با ۲ باشد. در این صورت اگر (a, b) یک دوتایی مربع‌ساز باشد، عدد صحیح c وجود دارد که $ab + ۱ = c^۲$. از آن‌جا که a زوج است پس c فرد است. مثلاً فرض کنید $c = ۲d + ۱$ که d عددی صحیح است. در نتیجه

$$ab = c^۲ - ۱ = (۲d + ۱)^۲ - ۱ = ۴d^۲ + ۴d = ۴d(d + ۱)$$

از آن‌جا که عدد $d(d+۱)$ همواره زوج است پس ab بر ۸ بخش‌پذیر است و چون a تنها یک عامل ۲ دارد، b باید بر ۴ بخش‌پذیر باشد.

بنابراین نشان دادیم که اعدادی که بر ۴ باقی‌ماندهٔ ۲ دارند تنها با اعدادی که بر ۴ بخش‌پذیرند، می‌توانند دوتایی مربع‌ساز تشکیل دهند. حال فرض می‌کنیم $n = ۲m + ۱$. توجه کنید که در بین اعداد $\{۱, ۲, \ldots, ۲n\}$ تعداد $m+۱$ عدد هستند که بر ۴ باقی‌ماندهٔ ۲ دارند در حالی‌که تعداد m عدد هستند که بر ۴ بخش‌پذیرند. بنابراین نمی‌توان مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, ۲n\}$ را به دوتایی‌های مربع‌ساز افراز کرد.

۶. دایره‌ای را به $۲n$ قطاع مساوی تقسیم کرده‌ایم. می‌خواهیم روی هر یک از آن‌ها یکی از اعداد ۰، ۱، …، $n-۱$ را بنویسیم به طوری‌که



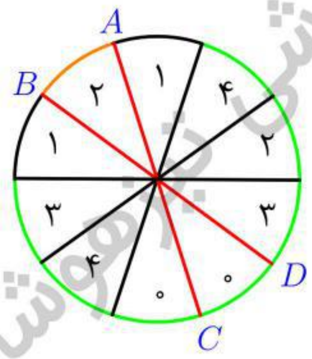
- هر عدد دقیقاً دو بار استفاده شود.
- برای هر عدد طبیعی i که $۰ \leq i \leq n-۱$، بین هر دو قطاع با شمارهٔ i، از یک طرف، دقیقاً i قطاع دیگر وجود داشته باشد.

در شکل روبه‌رو این کار برای $n = ۵$ انجام شده است.

ثابت کنید برای $n = ۱۳۹۹$ این کار امکان‌پذیر نیست.

راه حل اول.

فرض می‌کنیم این کار امکان‌پذیر باشد (برهان خلف) و یک حالت مطلوب را در نظر می‌گیریم. یک قطر از دایره را i-خوب می‌نامیم اگر دو قطاع با شمارهٔ i در دو طرف آن قطر قرار داشته باشند. ابتدا برای هر عدد طبیعی i که $۰ \leq i \leq ۱۳۹۸$، تعداد قطرهای i-خوب را محاسبه می‌کنیم.



به عنوان مثال در شکل مقابل دو قطر AC و BD ۱-خوب هستند و هر قطر دیگری را در نظر بگیریم، دو قطاع با شمارهٔ ۱ در یک طرف آن قطر قرار می‌گیرند. دقت کنید که بین هر دو قطاع با شمارهٔ i دو کمان از دایره وجود دارد و یک قطر i-خوب است اگر و تنها اگر دو سر آن در دو کمان متفاوت قرار داشته باشند. همچنین طبق شرط سوال یکی از این دو کمان شامل دقیقاً i قطاع است. در شکل مقابل کمان‌های سبز و نارنجی نشان‌دهندهٔ دو کمان بین دو قطاع با شمارهٔ ۱ هستند و کمان نارنجی‌رنگ شامل ۱ قطاع است. آن کمانی که شامل i قطاع است را در نظر بگیرید. از آن‌جا که $i < ۱۳۹۹$، هر قطری که یک سرش در این کمان باشد، سر دیگرش در کمان دوم است زیرا در دو طرف هر قطر ۱۳۹۹ قطاع وجود دارد. در نتیجه یک سر همهٔ قطرهای i-خوب در این کمان قرار دارد پس تعداد آن‌ها برابر با $i+۱$ است. حال تعداد دوتایی‌های (x, D) که x یک عدد طبیعی از ۱ تا ۱۳۹۸ و D یک قطر x-خوب است را S می‌نامیم. از آن‌جا که برای هر x، $x+۱$ قطر x-خوب داریم نتیجه می‌شود

$$S = (۰+۱) + (۱+۱) + (۲+۱) + \cdots + (۱۳۹۸+۱) = ۱۳۹۹ \times ۷۰۰$$

پس S عددی زوج است. از طرف دیگر قطر D را به دلخواه در نظر می‌گیریم. در هر طرف این قطر ۱۳۹۹ قطاع وجود دارد. قطاع‌هایی که شمارهٔ یکسان دارند و در یک طرف D قرار دارند تعداد زوج قطاع را اشغال می‌کنند، پس تعداد فرد قطاع باقی می‌ماند که نظیرشان در طرف دیگر قطر قرار دارد. این نتیجه می‌دهد برای هر قطر D، تعداد xهایی که دو قطاع با شمارهٔ x در دو طرف D قرار دارند فرد است. از آن‌جا که تعداد کل قطرها ۱۳۹۹ و عددی فرد است نتیجه می‌شود S باید فرد باشد که تناقض است. پس فرض خلف غلط بوده و حکم اثبات می‌شود.

نکته. به طور مشابه می‌توان نشان داد که این کار برای nهایی که باقی‌ماندهٔ آن‌ها بر ۴ برابر با ۲ یا ۳ است امکان‌پذیر نیست. آیا این کار برای همهٔ nهایی که بر ۴ باقی‌ماندهٔ ۰ یا ۱ دارند امکان‌پذیر است؟

راه حل دوم.

مسئله را در حالت کلی و برای عدد طبیعی دلخواه n حل می‌کنیم. فرض کنید برای n حداقل یک حالت که فرض‌های سوال را برآورده کند، وجود داشته باشد. به $۲n$ قطاع اعداد ۰ تا $۲n-۱$ را به طور متوالی نسبت می‌دهیم. فرض کنید برای هر i طبیعی که $۰ \leq i \leq n-۱$، به دو قطاع با شمارهٔ i اعداد a_i و b_i را نسبت داده باشیم. از فرض سوال نتیجه می‌شود

$$a_i - b_i \overset{۲n}{\equiv} \pm(i+۱) \implies a_i - b_i \overset{۲}{\equiv} i+۱$$

دقت کنید که $a_i + b_i \overset{۲}{\equiv} a_i - b_i$ پس داریم

$$i+۱ \overset{۲}{\equiv} a_i - b_i \overset{۲}{\equiv} a_i + b_i \qquad (۱)$$

اگر برای همهٔ iهای طبیعی از ۰ تا $n-۱$ دو طرف رابطهٔ (۱) را با هم جمع کنیم نتیجه می‌شود

$$\sum_{i=۰}^{n-۱}(i+۱) \overset{۲}{\equiv} \sum_{i=۰}^{n-۱}(a_i+b_i) = \sum_{i=۰}^{۲n-۱} i$$
$$\implies \frac{n(n+۱)}{۲} \overset{۲}{\equiv} n(۲n-۱)$$
$$\implies n(n+۱) \overset{۴}{\equiv} ۲n(۲n-۱)$$
$$\implies ۳n(n-۱) \overset{۴}{\equiv} ۰$$

پس باقی‌ماندهٔ n بر ۴ باید برابر با ۰ یا ۱ باشد اما می‌دانیم باقی‌ماندهٔ ۱۳۹۹ بر ۴ برابر با ۳ است که حکم سوال را نتیجه می‌دهد.


آکادمی تیزلاین
برگزار می کند:
www.tizline.ir
۰۲۱۴۴۱۳۶۹۷۵
دوره سالانــه
تخفیف ویژه
برا تیزلاینی ها
دکتر رضا رحمت اله زاده
کلاس آنلاین المپیاد
شیمی (سطح یک)
شنبه‌ها ۲۰ تا ۲۱:۱۵
شروع از ۲۲ آبان
۱۵ جلسه
۶۰۰ هزار تومان
دکتر افشین بهمرام
کلاس آنلاین المپیاد
ریاضی (سطح یک)
یکشنبه‌ها ۲۰ تا ۲۱:۱۵
شروع از ۲۳ آبان
۱۵ جلسه
۶۰۰ هزار تومان
دکتر میثم کوهگرد
کلاس آنلاین المپیاد
فیزیک (سطح یک)
پنجشنبه‌ها ۱۸:۱۵ تا ۱۹:۳۰
شروع از ۲۷ آبان
۱۵ جلسه
۶۰۰ هزار تومان
دکتر قربانی
کلاس آنلاین المپیاد
زیست‌شناسی (سطح یک)
سه‌شنبه‌ها ۱۸:۱۵ تا ۱۹:۳۰
شروع از ۲۵ آبان
۱۵ جلسه
۶۰۰ هزار تومان
دکتر میثم کوهگرد
کلاس آنلاین المپیاد
فیزیک (سطح دو)
پنجشنبه‌ها ۲۰ تا ۲۱:۱۵
شروع از ۲۷ آبان
۲۰ جلسه
۸۰۰ هزار تومان
دکتر قربانی
کلاس آنلاین المپیاد
زیست‌شناسی (سطح دو)
سه‌شنبه‌ها ۲۰ تا ۲۱:۱۵
شروع از ۲۵ آبان
۲۰ جلسه
۸۰۰ هزار تومان
#تیزلاینی_شو
ثبت نام در سایت رسمی
tizline.ir
www.tizline.ir
۰۹۳۳-۳۸۴ ۰۲۰۲
۰۲۱-۹۱۳۰۲۲۰۲

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور

تقویم آموزشی آکادمی تیزلاین

سال ۱۴۰۱-۱۴۰۰

#تیزلاینی_شو

ترم تابستان
آغاز ثبت نام: ۱۰ خرداد

شروع دوره: ۱۲ تیر

پایان دوره: ۲۰ شهریور

۱۰ جلسه

ترم یک دوره سالانه
آغاز ثبت نام: ۱ شهریور

شروع دوره: ۱۰ مهر

پایان دوره: ۱۸ دی

۱۵ جلسه

ترم دو دوره سالانه
آغاز ثبت نام: ۱ دی

شروع دوره: ۱ بهمن

پایان دوره: ۲۵ اردیبهشت

۱۵ جلسه

آنلاین تخصص ماست

کلاس ، آزمون ، مشاوره ، تکلیف

ثبت نام در سایت رسمی آکادمی تیزلاین www.Tizline.ir

آزمون های هماهنگ از ۲۵ مهر تا ۱۱ اردیبهشت