



# آکادمی آنلاین تیزلاین قوی ترین پلتفرم آموزشی تیز هوشان

برگزار کننده کلاس های آنلاین و حضوری تیز هوشان ✓

و المپیاد از پایه چهارم تا دوازدهم

آزمون های آنلاین و حضوری ✓

مشاوره تخصصی ✓

با اسکن QR کد روبرو  
وارد صفحه اینستاگرام  
آکادمی تیزلاین شو و از  
محتوای آموزشی  
رایگان لذت ببر



برای ورود به صفحه اصلی سایت آکادمی تیزلاین کلیک کنید

برای دانلود دفترچه آزمون های مختلف برای هر پایه کلیک کنید

برای مطالعه مقالات بروز آکادمی تیزلاین کلیک کنید

# بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

سوالات و راه حل های مرحله دوم سی و چهارمین  
دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۹۵

آزمون مرحله دوم سی و چهارمین المپیاد ریاضی کشور در تاریخ ۹ و ۱۰ اردیبهشت ۱۳۹۵ در سراسر کشور و با شرکت دانش آموزان پذیرفته شده در آزمون مرحله اول برگزار شد. شرکت کنندگان در دو روز و در هر روز به مدت چهار و نیم ساعت به سه سوال تشریحی پاسخ دادند. دفترچه پیش رو، شامل سوالات آزمون به همراه راه حل آن هاست. لازم به ذکر است که این دفترچه صرفاً برای هدف آموزشی تهیه شده است و بارمبندی تصحیح آزمون، مستقلاً توسط گروهی از کارشناسان تهیه می شود.

۱. فرض کنید  $0 < a \leq b \leq c$ ، اعدادی حقیقی باشند. ثابت کنید:

$$\frac{(c-a)^2}{6c} \leq \frac{a+b+c}{3} - \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

۲. مثلث  $ABC$  با دایره محیطی  $w_1$  مفروض است و داریم  $\angle C = 2\angle B$ . در نقطه  $A$  مماسی بر دایره  $w_1$  رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع  $BC$  را در نقطه  $E$  قطع کند. دایره  $w_2$  را طوری رسم می‌کنیم که در نقطه  $C$  بر ضلع  $AC$  مماس باشد و همچنین از نقطه  $B$  بگذرد. این دایره ضلع  $AB$  را در نقطه  $F$  قطع می‌کند. از نقطه  $E$  مماس  $EK$  را بر دایره  $w_2$  رسم می‌کنیم ( $BC$  بین  $A$  و  $K$  است). اگر وسط کمان  $BC$  از دایره  $w_1$  (کمانی که شامل  $A$  نیست) را  $M$  بنامیم، ثابت کنید چهارضلعی  $MFAK$  محاطی است.

(۷ نمره)

۳. فرض کنید شورایی شش عضو دارد و تصمیم‌ها در این شورا بر اساس رأی موافق و مخالف اعضاء گرفته می‌شود. یک «روش قابل قبول تصمیم‌گیری» باید دارای دو شرط زیر باشد:

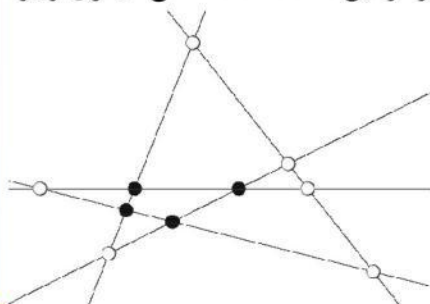
- شرط صعودی بودن: اگر در حالتی نتیجه نهایی مثبت باشد و یکی از اعضای مخالف، نظرش را به موافق تغییر دهد، نتیجه نهایی باید باز هم مثبت باشد.
- شرط تقارن: اگر همه اعضاء نظر خود را تغییر دهند، نتیجه نهایی نیز باید تغییر کند.

یک نوع روش قابل قبول تصمیم‌گیری، «رأی‌گیری وزن‌دار» است. به این ترتیب که به اعضاء وزن‌های نامنفی  $w_1, w_2, \dots, w_n$  تخصیص داده شود و تصمیم نهایی با مقایسه مجموع وزن رأی‌دهندگان موافق و مخالف مشخص شود. مثلاً اگر  $w_1 = 2$  و برای هر  $i \geq 2, w_i = 1$ ، تصمیم‌گیری بر اساس رأی اکثریت است مگر در حالت برابری آراء که رأی نفر اول معیار تصمیم خواهد بود.

یک روش قابل قبول تصمیم‌گیری مثال بزنید که به شکل رأی‌گیری وزن‌دار، قابل توصیف نباشد. واضح است که باید درستی مثال خود را نیز ثابت کنید.

(۷ نمره)

۴. در صفحه  $n \geq 3$  خط دوه‌دو متقاطع رسم شده است که هیچ سه تایی از آن‌ها هم‌مرس نیستند. یک نقطه تقاطع دو تا از این خط‌ها را «درونی» می‌گوییم، هرگاه در هر دو طرف این نقطه روی هر دو خط گذرا از این نقطه، نقاط تقاطع دیگری وجود داشته باشد. (برای مثال، در شکل روبه‌رو ۵ خط با ۴ نقطه تقاطع درونی نشان داده شده است که با دواپر توپر مشخص شده‌اند).



نشان دهید دست‌کم به تعداد  $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$  تا از نقاط تقاطع این  $n$  خط، درونی هستند.

(۷ نمره)

۵. چهارضلعی  $ABCD$  و نقطه  $T$  داخل آن طوری انتخاب شده‌اند که  $AC$  نیمساز زاویه  $\angle BCD$  است،  
 $\angle ABC - \angle ATD = \angle DAC$  و همچنین  $\angle ADC - \angle ATB = \angle BAC$ .  
ثابت کنید:  $\angle BAT = \angle DAC$ .

(۷ نمره)

۶. همه توابع  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  را بیابید که در دو شرط زیر صدق می‌کنند:

- به ازای هر دو عدد طبیعی  $x$  و  $y$ ، مقدار  $f(x) + f(y)$  بر  $x + y$  بخش پذیر است.
- برای هر عدد طبیعی  $x \geq 1395$ ، نابرابری  $2f(x) \leq x^2$  برقرار است.

(۷ نمره)

سؤالات و راه حل های مرحله دوم سی و چهارمین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۹۵

۱. فرض کنید  $0 < a \leq b \leq c$ ، اعدادی حقیقی باشند. ثابت کنید:

$$\frac{(c-a)^2}{6c} \leq \frac{a+b+c}{3} - \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

راه حل اول. صرفاً برای خلاصه شدن عبارات، تعریف می کنیم  $S = a + c$  و  $P = ac$ . در این صورت برای سمت راست نابرابری مسأله داریم:

$$R = \frac{a+b+c}{3} - \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = \frac{S+b}{3} - \frac{3Pb}{Sb+P}$$

هدف این است که عبارت اخیر را به عنوان تابعی بر حسب متغیر  $b$  مینیمم کنیم؛ توجه کنید که عبارت مورد بحث بر حسب متغیر  $b$  شامل یک جزء خطی، یعنی  $\frac{S+b}{3}$  و یک جزء کسری است که مخرج آن  $Sb+P$  است. اکنون با تغییر متغیر  $t = Sb + P$  عبارت را بازنویسی می کنیم و با کمی محاسبه ساده به عبارت زیر می رسیم:

$$R = \frac{S+b}{3} - \frac{3Pb}{Sb+P} = \frac{S^2 - 10P}{3S} + \frac{t}{3S} + \frac{3P^2}{St}$$

اکنون توجه کنید که حاصل ضرب دو جمله آخر، عبارتی بدون متغیر  $t$  است. پس طبق نابرابری  $u + v \geq 2\sqrt{uv}$  داریم:

$$R \geq \frac{S^2 - 10P}{3S} + 2\sqrt{\frac{P^2}{S^2}} = \frac{S^2 - 4P}{3S} = \frac{(c-a)^2}{3(c+a)} \geq \frac{(c-a)^2}{6c}$$

راه حل دوم. برای راحتی در نوشتن، به ازای هر فرمول دلخواه  $F(a, b, c)$  بر حسب سه متغیر  $a, b$  و  $c$  جمع دوری

$$F(a, b, c) + F(b, c, a) + F(c, a, b)$$

را با  $\sum F(a, b, c)$  نمایش می دهیم. با این نمادگذاری سمت راست نابرابری مسأله را بسط می دهیم:

$$\begin{aligned} \frac{\sum a}{3} - \frac{3}{\sum \frac{1}{a}} &= \frac{\sum a}{3} - \frac{3abc}{\sum ab} = \frac{(\sum a)(\sum ab) - 9abc}{3\sum ab} \\ &= \frac{\sum(a^2b + ab^2) - 6abc}{3\sum ab} = \frac{\sum a(b-c)^2}{3\sum ab} \end{aligned}$$

بنابراین نابرابری مسأله معادل با نابرابری زیر است:

$$\sum a(b-c)^2 \geq \left(\frac{\sum ab}{2c}\right) (c-a)^2 \quad (1)$$

اما توجه کنید که با توجه به ترتیب  $a \leq b \leq c$ ،  $\frac{ab}{2c}$  از  $\frac{b}{4}$  بیشتر نیست و در نتیجه برای سمت راست نابرابری بالا داریم:

$$\left(\frac{\sum ab}{2c}\right) (c-a)^2 = \left(\frac{ab}{2c} + \frac{a+b}{2}\right) (c-a)^2 \leq \left(\frac{a}{2} + b\right) (c-a)^2 \quad (2)$$

سؤالات و راه حل های مرحله دوم سی و چهارمین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۹۵

برای سمت چپ نابرابری (۱) هم به دست می آید:

$$\sum a(b-c)^2 \geq b(c-a)^2 + a((c-b)^2 + (b-a)^2). \quad (۳)$$

حال توجه کنید که برای هر دو عدد  $X$  و  $Y$ ,

$$(X-Y)^2 \geq 0 \implies X^2 + Y^2 - 2XY \geq 0 \implies 2(X^2 + Y^2) \geq (X+Y)^2 \\ \implies X^2 + Y^2 \geq \frac{(X+Y)^2}{2}.$$

در نتیجه اگر قرار دهیم،  $X = c-b$ ,  $Y = b-a$ ، با استفاده از نابرابری (۳) می توان نتیجه گرفت که:

$$\sum a(b-c)^2 \geq b(c-a)^2 + a((c-b)^2 + (b-a)^2) \geq b(c-a)^2 + \frac{a}{2}(c-a)^2.$$

و این نابرابری به همراه نابرابری (۲)، نابرابری (۱) که معادل حکم مسأله است را نتیجه می دهد.

سؤالات و راه حل های مرحله دوم سی و چهارمین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۹۵

۲. مثلث  $ABC$  با دایره محیطی  $w_1$  مفروض است و داریم  $\angle C = 2\angle B$ . در نقطه  $A$  مماسی بر دایره  $w_1$  رسم می کنیم تا امتداد ضلع  $BC$  را در نقطه  $E$  قطع کند. دایره  $w_2$  را طوری رسم می کنیم که در نقطه  $C$  بر ضلع  $AC$  مماس باشد و همچنین از نقطه  $B$  بگذرد. این دایره ضلع  $AB$  را در نقطه  $F$  قطع می کند. از نقطه  $E$  مماس  $EK$  را بر دایره  $w_2$  رسم می کنیم ( $BC$  بین  $A$  و  $K$  است). اگر وسط کمان  $BC$  از دایره  $w_1$  (کمانی که شامل  $A$  نیست) را  $M$  بنامیم، ثابت کنید چهارضلعی  $MFAK$  محاطی است.

راه حل اول. اگر محل تقاطع  $FK$  و  $BC$  را  $D$  بنامیم، آنگاه در دایره  $w_2$  داریم:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{ACB} &= \frac{\widehat{BC}}{2} \\ \widehat{FBC} &= \frac{\widehat{FC}}{2} \\ \widehat{C} &= 2\widehat{B} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{BF} = \widehat{FC},$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{CDK} &= \frac{\widehat{BF} + \widehat{CK}}{2} \\ \widehat{DKE} &= \frac{\widehat{FC} + \widehat{CK}}{2} \\ \widehat{BF} &= \widehat{FC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{EDK} = \widehat{DKE} \Rightarrow ED = EK. \quad (4)$$

از طرفی طبق قوت نقطه  $E$  نسبت به دو دایره  $w_1$  و  $w_2$  می دانیم:

$$\left. \begin{aligned} EK^2 &= EC \cdot EB \\ EA^2 &= EC \cdot EB \end{aligned} \right\} \Rightarrow EK = EA. \quad (5)$$

و ترکیب (۴) و (۵) نتیجه می دهد که:

$$ED = EA \Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{DAE}.$$

حال اگر  $AD$  را امتداد دهیم تا دایره  $w_1$  را در  $N$  قطع کند، در دایره  $w_1$  داریم:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{DAE} &= \frac{\widehat{AC} + \widehat{CN}}{2} \\ \widehat{ADE} &= \frac{\widehat{AC} + \widehat{BN}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{CN} = \widehat{BN}.$$

و  $N$  وسط کمان  $BC$  (یعنی همان  $M$ ) است.

حال طبق قوت  $D$  در دو دایره داریم:

$$FD \cdot DK = BD \cdot DC = MD \cdot DA,$$

پس  $FD \cdot DK = MD \cdot DA$  در نتیجه چهارضلعی  $MFAK$  محاطی است.

سؤالات و راه حل های مرحله دوم سی و چهارمین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۹۵

راه حل دوم. اگر قوت نقطه  $E$  را نسبت به دو دایره  $w_1$  و  $w_2$  بنویسیم، داریم:

$$\left. \begin{aligned} EC \cdot EB &= EA^2 \\ EC \cdot EB &= EK^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow EA = EK.$$

حال ثابت می کنیم که نیمساز زاویه  $BAC$  و نیمساز زاویه  $BKC$  روی ضلع  $BC$  هم دیگر را قطع می کنند. برای این منظور کافی است اثبات کنیم که  $\frac{KB}{KC} = \frac{AB}{AC}$ .  
 دو مثلث  $EKB$  و  $EKC$  با هم متشابه اند، پس  $\frac{KB}{KC} = \frac{EB}{EC}$ . همچنین دو مثلث  $EBA$  و  $EAC$  نیز متشابه اند و داریم:  $\frac{AB}{AC} = \frac{EB}{EA}$ .  
 و چون می دانیم  $EK = EA$  پس  $\frac{KB}{KC} = \frac{AB}{AC}$ . حال اگر محل برخورد این نیمسازها با ضلع  $BC$  را  $D$  بنامیم،  $M$  و  $F$  وسط کمان  $BC$  از دو دایره هستند، پس  $K$  و  $D$  و  $F$  هم خطند و  $A$  و  $D$  و  $M$  نیز هم خطند.  
 قوت  $D$  را در دو دایره می نویسیم:

$$\left. \begin{aligned} BD \cdot DC &= AD \cdot DM \\ BD \cdot DC &= FD \cdot DK \end{aligned} \right\} \Rightarrow AD \cdot DM = FD \cdot DK,$$

پس چهارضلعی  $AFMK$  محاطی است.



سؤالات و راه‌حل‌های مرحله دوم سی و چهارمین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۹۵

۳. فرض کنید شورایی شش نفر عضو دارد و تصمیمات در این شورا بر اساس رأی موافق و مخالف اعضا گرفته می‌شود. یک «روش قابل قبول تصمیم‌گیری» باید دارای دو شرط زیر باشد:

• شرط صعودی بودن: اگر در حالتی نتیجه نهایی مثبت باشد و یکی از اعضای مخالف، نظرش را به موافق تغییر دهد، نتیجه نهایی باید باز هم مثبت باشد.

• شرط تقارن: اگر همه اعضا نظر خود را تغییر دهند، نتیجه نهایی نیز باید تغییر کند.

یک نوع روش قابل قبول تصمیم‌گیری، «رأی‌گیری وزن‌دار» است. به این ترتیب که به اعضا وزن‌های نامنفی  $w_1, w_2, \dots, w_6$  تخصیص داده شود و تصمیم نهایی با مقایسه مجموع وزن رأی‌دهندگان موافق و مخالف مشخص شود. مثلاً اگر  $w_1 = 2$  و برای هر  $i \geq 2$ ،  $w_i = 1$ ، تصمیم‌گیری بر اساس رأی اکثریت است مگر در حالت برابری آراء که رأی نفر اول معیار تصمیم خواهد بود. یک روش قابل قبول تصمیم‌گیری مثال بزنید که به شکل رأی‌گیری وزن‌دار، قابل توصیف نباشد. واضح است که باید درستی مثال خود را نیز ثابت کنید.



راه حل. اعضای شورا را با شماره‌های ۱ تا ۶، شماره‌گذاری می‌کنیم. روش زیر برای تصمیم‌گیری را در نظر بگیرید:

اگر نفرات اول تا سوم هم‌رأی بودند، رأی آنها را به عنوان نتیجه نهایی در نظر می‌گیریم و در غیر این صورت نتیجه نهایی بر اساس اکثریت آراء نفرات چهارم تا ششم تعیین می‌شود.

این روش تصمیم‌گیری به وضوح دارای دو شرط صعودی بودن و تقارن است و بنابراین یک روش قابل قبول است. ادعا می‌کنیم که به هیچ صورتی نمی‌توان به اعضا وزن داد، به طوری که این روش از مقایسه وزن اعضای موافق و مخالف حاصل شود.

با برهان خلف فرض می‌کنیم چنین نباشد و وزن‌دهی  $(w_1, \dots, w_6)$  یک وزن‌دهی برای این روش باشد. (یعنی وزن نفر اول،  $w_1$ ، وزن نفر دوم،  $w_2$  و به همین ترتیب وزن نفر  $i$ -ام،  $w_i$  است) با توجه به یکسان بودن نقش سه عضو اول با یکدیگر و همچنین سه عضو آخر با هم در این روش،

$$(w_2, w_3, w_1, w_5, w_6, w_4)$$

سؤالات و راه‌حل‌های مرحله دوم سی و چهارمین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۹۵

و همین‌طور

$$(w_3, w_1, w_2, w_6, w_4, w_5)$$

وزن‌دهی‌های دیگری برای این روش هستند. به سادگی می‌توان دید که اگر چند وزن‌دهی به یک روش تصمیم‌گیری منجر شوند، جمع آنها هم همان روش تصمیم‌گیری را به ما می‌دهد. پس جمع سه وزن‌دهی ذکر شده یک وزن‌دهی برای روش تصمیم‌گیری پیشنهادی ماست، یعنی اگر قرار دهیم

$$a = w_1 + w_2 + w_3 \quad \text{و} \quad b = w_4 + w_5 + w_6$$

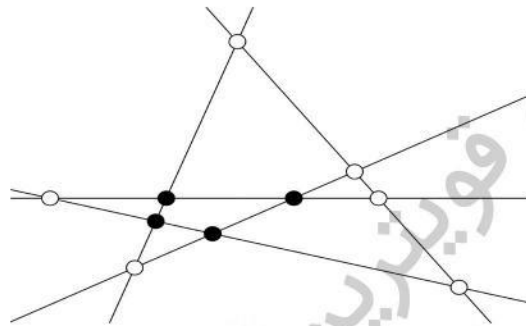
حال ابتدا حالتی را در نظر بگیرید که سه نفر اول موافق و سه نفر دوم مخالف باشند. در این صورت در روش ما نتیجه نهایی موافق است و بنابر وزن‌دهی ادعا شده،  $3a > 3b$ . حالت دیگری را هم می‌توان در نظر گرفت که دو نفر از سه نفر اول و یک نفر از سه نفر آخر موافق و بقیه مخالف باشند. در این حالت، تصمیم نهایی مخالف است و جمع وزن موافقان  $2a + b$  و وزن مخالفان  $2b + a$  است. باز اگر وزن‌دهی ادعا شده همین نتیجه را بدهد، باید داشته باشیم  $2a + b > 2b + a$  و در نتیجه  $b > a$ . این نابرابری با نابرابری قبلی متناقض است و در نتیجه فرض خلف ما به تناقض منجر می‌شود. پس روش تصمیم‌گیری ارائه شده وزن‌دار نیست.

**تذکر.** روش‌های تصمیم‌گیری قابل قبول دیگری نیز می‌توان ارائه کرد که وزن‌دار نباشند. ما در اینجا به دو نمونه دیگر اشاره می‌کنیم:

- اگر یک تصمیم (موافق یا مخالف)، بیشتر از سه رأی داشته باشد، به عنوان تصمیم نهایی انتخاب می‌شود و در صورت تساوی آراء موافق و مخالف، تصمیمی که تعداد موافقان آن در میان نفرات اول تا سوم، عددی فرد باشد، اتخاذ می‌شود.
- فرض کنید پنج نفر اول دور یک میز نشسته‌اند. در این صورت اگر سه نفر مجاور از آنها هم‌نظر بودند، نظر مشترک آنها و در غیر این صورت نظر نفر ششم اتخاذ می‌شود.

سؤالات و راه‌حل‌های مرحله دوم سی و چهارمین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۹۵

۴. در صفحه  $n \geq 3$  خط دوجه دو متقاطع رسم شده است که هیچ سه‌تایی از آن‌ها هم‌رس نیستند. یک نقطه تقاطع دو تا از این خط‌ها را «درونی» می‌گوییم، هرگاه در هر دو طرف این نقطه روی هر دو خط گذرا از این نقطه، نقاط تقاطع دیگری وجود داشته باشد. (برای مثال، در شکل روبه‌رو ۵ خط با ۴ نقطه تقاطع درونی نشان داده شده است که با دایره‌های توپر مشخص شده‌اند).



نشان دهید دست‌کم به تعداد  $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$  تا از نقاط تقاطع این  $n$  خط، درونی هستند. راه حل. گرافی در نظر بگیرید که رئوس آن نقاط تقاطع خطوط مسأله و یال‌های آن پاره‌خط‌هایی است که این خطوط روی یکدیگر جدا می‌کنند. (یعنی پاره‌خط‌هایی روی این خطوط که دو سر آن دو تقاطع است و درون آن تقاطعی وجود ندارد) این گراف را  $G$  می‌نامیم. هر دو تا از این  $n$  خط دقیقاً یک تقاطع دارند و در نتیجه تعداد رئوس گراف  $G$  برابر  $\frac{n(n-1)}{2}$  است. از طرف دیگر روی هر خط  $n-1$  تقاطع وجود دارد و در نتیجه پاره‌خط‌های مابین آن‌ها  $n-2$  یال از گراف  $G$  به ما می‌دهد. پس تعداد یال‌های گراف هم برابر  $n(n-2)$  است.

با توجه به اینکه تعداد خطوط حداقل سه تا است، درجات رئوس  $G$ ، ۲، ۳ یا ۴ است که تعداد رئوس با هر یک از این درجات را به ترتیب با  $a$ ،  $b$  و  $c$  نشان می‌دهیم. رئوس با بیشترین درجه همان نقاط تقاطع درونی هستند. حال توجه کنید که با داشتن تعداد کل رئوس گراف  $G$  و اینکه جمع درجات رئوس در هر گراف دو برابر تعداد یال‌های آن است، دو رابطه زیر به دست می‌آید:

$$a + b + c = \frac{n(n-1)}{2},$$

$$2a + 3b + 4c = 2n(n-2).$$

اگر ۳ برابر تساوی اول را از تساوی دوم کم کنیم، به تساوی زیر می‌رسیم:

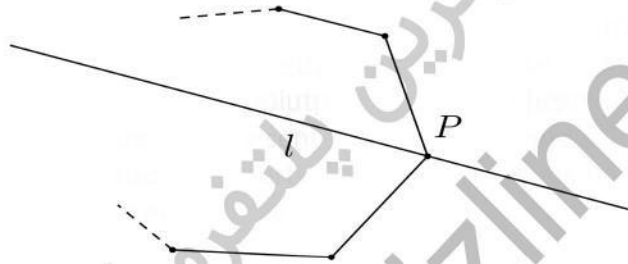
$$c - a = \frac{n^2 - 5n}{2} \implies c = (a - 3) + \frac{(n-2)(n-3)}{2}.$$

پس حکم معادل با این است که در گراف  $G$  حداقل ۳ رأس با درجه ۲ داریم. برای اثبات این گزاره هم از لم زیر استفاده می‌کنیم که شهوداً واضح است و اثباتش در پایان می‌آید:

سؤالات و راه‌حل‌های مرحله دوم سی و چهارمین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۹۵

لم. برای هر تعداد نقطه دلخواه در صفحه که هم خط نباشند، یک چندضلعی محدب وجود دارد که همه این نقاط درون و یا روی اضلاع آن قرار می‌گیرند و رئوس آن از میان این نقاط باشند.

حال اگر لم را برای نقاط تقاطع خطوط مسأله استفاده کنیم، نتیجه می‌شود که یک  $k \geq 3$ -ضلعی محدب وجود دارد که رئوس آن از میان تقاطع‌هاست و بقیه تقاطع‌ها درون و یا روی اضلاع آن قرار دارند. به راحتی می‌توان دید که درجه همه رئوس این چندضلعی در گراف  $G$  برابر ۲ است. زیرا اگر  $l$  یکی از دو خط گذرا از رأس  $P$  در این چندضلعی باشد، همه تقاطع‌های روی آن در درون چندضلعی و در نتیجه در یک طرف  $P$  قرار دارند. پس فقط یک رأس مجاور روی این خط دارد و با در نظر گرفتن خط دیگر گذرا از  $P$ ، نتیجه می‌شود که درجه  $P$  در گراف برابر ۲ است.



پس  $a \geq k \geq 3$  و اثبات کامل می‌شود.

اثبات لم. یک خط در نظر بگیرید که همه نقاط در یک طرف آن باشند و با هیچ یک از خطوط واصل دو تا از نقاط داده شده موازی نباشد. حال این خط را به موازات خود به سمتی که نقاط قرار دارند حرکت دهید تا به اولین نقطه برسد. با توجه به فرضی که در مورد راستای خط کردیم، در این لحظه فقط یک نقطه روی خط قرار دارد که آن را  $P_1$  می‌نامیم. حال خطمان را در جهت ساعت‌گرد حول  $P_1$  می‌چرخانیم تا به اولین نقطه دیگر برخورد کند. دورترین نقطه روی خط از  $P_1$  در این وضعیت را  $P_2$  می‌نامیم. حال خط را حول  $P_2$  در جهت ساعت‌گرد بچرخانید تا به اولین نقطه جدید برخورد کنید و به همین ترتیب دنباله نقاط  $P_2, P_3, \dots$  را بسازید. با توجه به متناهی بودن کل نقاط، جایی در این دنباله با دور مواجه می‌شویم و نقاط این دور و پاره‌خط‌های بین نقاط متوالی، چندضلعی محدب خواسته شده را به ما می‌دهد. (خیلی راحت می‌توان نشان داد که این دور کامل است، گرچه به این مطلب برای اثبات لم احتیاج نداریم. ضمناً چندضلعی محدب با شرایط لم یکتاست و به آن «پوش محدب» مجموعه مورد نظر از نقاط می‌گویند.)

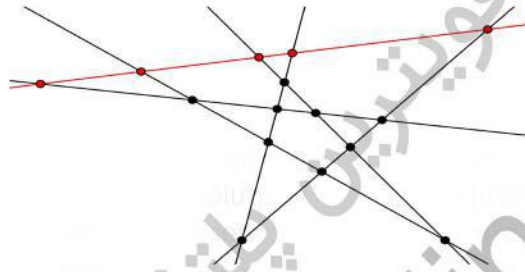
تذکر. با توجه به رابطه

$$\frac{(n-2)(n-3)}{2} = \frac{(n-3)(n-4)}{2} + n - 3,$$

سؤالات و راه‌حل‌های مرحله دوم سی و چهارمین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۹۵

تلاش برای اثبات گزاره زیر، یک ایده برای اثبات حکم مسأله با استفاده از استقراء است:  
 اضافه کردن یک خط جدید به یک مجموعه از  $n - 1$  خط در صفحه، (که همگی دوجه دو متقاطع باشند و هیچ سه‌تایی هم‌مرس نباشند) حداقل  $n - 3$  نقطه به نقاط تقاطع درونی اضافه می‌کند.

اما متأسفانه (!) این گزاره غلط است و شکل زیر یک مثال نقض برای آن در حالت  $n = 6$  ارائه می‌کند: (خط قرمز، خط جدید است)

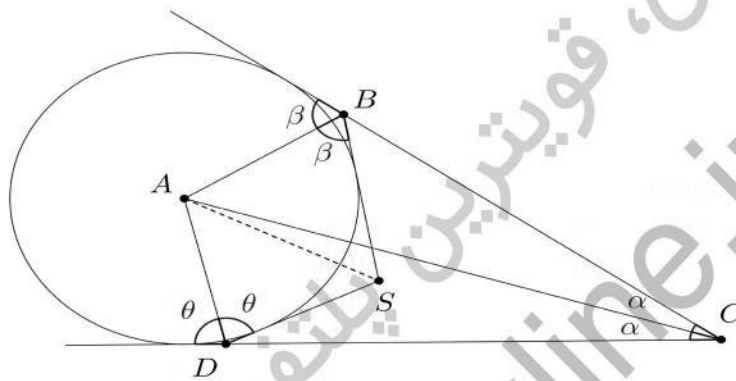


تعداد تقاطع‌های درونی قبل از اضافه کردن خط جدید، ۵ تا و بعد از اضافه کردن ۷ تا است و در نتیجه کمتر از  $n - 3 = 3$  تا زیاد می‌شود.

سؤالات و راه حل های مرحله دوم سی و چهارمین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۹۵

۵. چهارضلعی  $ABCD$  و نقطه  $T$  داخل آن طوری انتخاب شده اند که  $AC$  نیمساز زاویه  $\angle BCD$  است،  $\angle ABC - \angle ATD = \angle DAC$  و همچنین  $\angle ADC - \angle ATB = \angle BAC$ . ثابت کنید:  $\angle BAT = \angle DAC$ .

راه حل اول. رأس  $A$  روی نیمساز زاویه  $\widehat{C}$  قرار دارد و از دو خط  $CB$  و  $CD$  به یک فاصله است. بنابراین می توان دایره ای به مرکز  $A$  رسم کرد که بر دو خط  $CB$  و  $CD$  مماس باشد. خطوط مماس بر دایره که از  $B$  و  $D$  رسم می شوند در  $S$  متقاطع اند.



$$\begin{aligned} \widehat{BSD} &= \widehat{BCD} + \widehat{CBS} + \widehat{CDS} = 2\alpha + 180^\circ - 2\beta + 180^\circ - 2\theta = 2(180^\circ + \alpha - \beta - \theta) \\ \Rightarrow \widehat{BSA} &= \widehat{DSA} = 180^\circ + \alpha - \beta - \theta \\ \Rightarrow \begin{cases} \widehat{ABC} - \widehat{ASD} &= (180^\circ - \beta) - (180^\circ + \alpha - \beta - \theta) = \theta - \alpha = \widehat{DAC} \\ \widehat{ADC} - \widehat{ASB} &= (180^\circ - \theta) - (180^\circ + \alpha - \beta - \theta) = \beta - \alpha = \widehat{BAC} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} \widehat{ASD} &= \widehat{ATD} \\ \widehat{ASB} &= \widehat{ATB} \end{cases} \end{aligned} \quad (۶)$$

با توجه به تعریف نقطه  $T$  و یکتا بودن آن نتیجه می گیریم، نقطه  $S$  بر  $T$  منطبق است و در نتیجه:

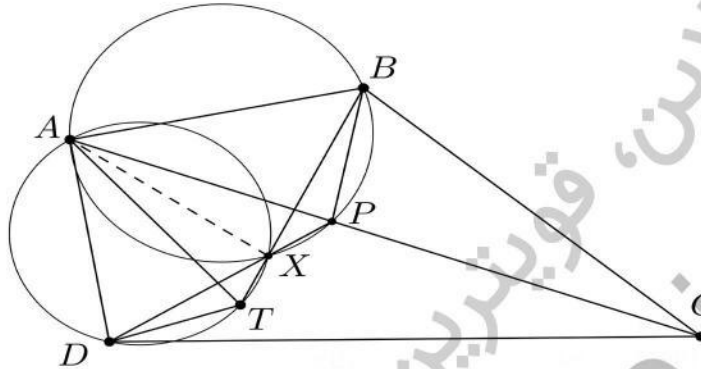
$$\widehat{BAS} = 180^\circ - \widehat{ABS} - \widehat{ASB} = 180^\circ - \beta - (180^\circ + \alpha - \beta - \theta) = \theta - \alpha = \widehat{DAC}.$$

اگر نقاط  $S$  و  $T$  بر هم منطبق نباشند، با توجه به رابطه (۶) چهارضلعی های  $ADST$  و  $ABST$  محاطی اند، پس  $BADS$  محاطی است و داریم:

$$\begin{aligned} \beta + \theta = 180^\circ &\Rightarrow \widehat{BSA} = \widehat{DSA} = 180^\circ + \alpha - \beta - \theta = \alpha \\ &\Rightarrow \widehat{BSD} = \widehat{BSA} + \widehat{DSA} = 2\alpha \\ &\Rightarrow \widehat{BTD} = \widehat{BSD} = 2\alpha = \widehat{BCD}, \end{aligned}$$

سؤالات و راه حل های مرحله دوم سی و چهارمین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۹۵

اما طبق فرض مسأله نقطه  $T$  داخل چهارضلعی  $ABCD$  قرار دارد و  $\widehat{BTD} > \widehat{BCD}$ . بنابراین  $S$  و  $T$  منطبق اند.  
راه حل دوم.



$$\begin{aligned} \widehat{BCA} = \widehat{DCA} &\implies \widehat{ABC} + \widehat{BAC} = \widehat{ADC} + \widehat{DAC} \\ &\implies \widehat{ABC} - \widehat{DAC} = \widehat{ADC} - \widehat{BAC} \\ &\implies \widehat{ATD} = \widehat{ATB} = \alpha. \end{aligned}$$

نقطه  $P$  را بر قطر  $AC$  در نظر می گیریم به طوری که  $\widehat{PBC} = \widehat{DAC}$  داریم:

$$\widehat{ABP} = \widehat{ABC} - \widehat{PBC} = \widehat{ABC} - \widehat{DAC} = \alpha,$$

$$\left. \begin{aligned} \triangle BPC \sim \triangle ADC &\implies \frac{BC}{AC} = \frac{PC}{DC} \implies \frac{BC}{PC} = \frac{AC}{DC} \\ \widehat{BCA} = \widehat{DCA} & \end{aligned} \right\} \implies \triangle DPC \sim \triangle ABC,$$

$$\implies \widehat{PDC} = \widehat{BAC}$$

$$\implies \widehat{ADP} = \widehat{ADC} - \widehat{PDC} = \widehat{ADC} - \widehat{BAC} = \alpha.$$

نقطه تقاطع  $DP$  و  $BT$  را  $X$  می نامیم.

$$\widehat{ADX} = \widehat{ATX} = \alpha \implies \text{محاظی است. } ADTX$$

$$\widehat{AXD} = \widehat{ATD} = \widehat{ABP} = \alpha \implies \text{محاظی است. } ABPX$$

در نتیجه

$$\widehat{BAP} = \widehat{BXP} = \widehat{DXT} = \widehat{DAT} \implies \widehat{BAT} = \widehat{DAC}.$$

سؤالات و راه‌حل‌های مرحله دوم سی و چهارمین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۹۵

۶. همه توابع  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  را بیابید که در دو شرط زیر صدق می‌کنند:

- به ازای هر دو عدد طبیعی  $x$  و  $y$ ، مقدار  $f(x) + f(y)$  بر  $x + y$  بخش‌پذیر است.
- برای هر عدد طبیعی  $x \geq 1395$ ، نابرابری  $2f(x) \leq x^3$  برقرار است.

راه حل. ابتدا توجه کنید که با قرار دادن  $x = y$  در شرط اول، نتیجه می‌شود که  $f(x)$  بر  $x$  بخش‌پذیر است و در نتیجه می‌توانیم بنویسیم،  $f(x) = xg(x)$  که  $g(x)$  عددی طبیعی است. حال فرض کنیم  $g(1) = a$  و  $g(2) = b$ . نشان می‌دهیم اگر  $x$  یک عدد فرد به اندازه کافی بزرگ باشد،  $g(x)$  برابر  $a$  است. برای این کار دو بار از شرط اول برای  $y = 1$  و  $y = 2$  استفاده می‌کنیم:

$$x + 1 \mid xg(x) + a = (x + 1)g(x) + (a - g(x)) \implies x + 1 \mid g(x) - a,$$

$$x + 2 \mid xg(x) + 2b = (x + 2)g(x) + 2(b - g(x)) \implies x + 2 \mid g(x) - b.$$

(نتیجه‌گیری آخر به این علت است که  $x + 2$  فرد است) در نتیجه با توجه به نسبت به هم اول بودن  $x + 1$  و  $x + 2$ ، باقیمانده  $g(x)$  بر  $(x + 1)(x + 2)$  با دانستن باقیمانده‌اش بر  $x + 1$  و  $x + 2$  به صورت یکتا به دست می‌آید.  $a(x + 2) - b(x + 1)$  در دو بخش‌پذیری بالا به جای  $g(x)$  صدق می‌کند، پس داریم:

$$g(x) = a(x + 2) - b(x + 1) + c(x + 1)(x + 2) = cx^2 + (3c + a - b)x + (2c + 2a - b).$$

که  $c$  عددی صحیح است. با توجه به فرض مسأله برای  $x$ ‌های به اندازه کافی بزرگ  $0 < g(x) \leq \frac{x^2}{4}$ ، پس  $c$  نامنفی و حداکثر  $\frac{1}{4}$  است و چون صحیح است،  $c = 0$ ، پس داریم:

$$g(x) = (a - b)x + (2a - b).$$

لم. اگر  $X$  و  $Y$  نسبت به هم اول باشند،  $X + Y \mid g(X) - g(Y)$ .

اثبات لم. بنابر فرض مسأله  $Xg(X) + Yg(Y)$  بر  $X + Y$  بخش‌پذیر است. پس اگر  $(X + Y)g(Y)$  را هم از آن کم کنیم، باز چنین است. پس  $(X + Y)(g(X) - g(Y))$  بر  $X + Y$  بخش‌پذیر است. اما  $X$  و  $X + Y$  نسبت به هم اولند، پس  $g(X) - g(Y)$  بر  $X + Y$  بخش‌پذیر است.

حال در ادامه حل مسأله فرض کنیم  $x'$  عدد فرد به اندازه کافی بزرگ دیگری باشد که نسبت به  $x$  اول است، در این صورت با توجه به لم:

$$x + x' \mid (a - b)(x - x'),$$



سؤالات و راه‌حل‌های مرحله دوم سی و چهارمین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۹۵

اما بزرگترین مقسوم علیه مشترک  $x + x'$  و  $x - x'$  برابر ۲ است، پس  $(a - b) \mid \frac{x+x'}{2}$ . حال اگر  $x'$  را از دو برابر قدرمطلق  $a - b$  بزرگتر بگیریم، نتیجه می‌شود  $a - b = 0$  و در نتیجه برای  $x$  های فرد بزرگ  $g(x) = 2a - b = a$  و ادعای ما ثابت می‌شود. حال فرض کنید  $y$  یک عدد طبیعی دلخواه باشد. اگر  $x$  را یک عدد طبیعی به اندازه کافی بزرگ بگیریم که نسبت به  $2y$  اول باشد، بنا برلم:

$$x + y \mid g(x) - g(y) = a - g(y).$$

پس  $a - g(y)$  بر تمامی  $x + y$  هایی که  $x$  خاصیت گفته شده را داشته باشد، بخش پذیر است. اما اگر  $a - g(y)$  صفر نباشد،  $x$  نمی‌تواند از حدی بزرگتر باشد. پس نتیجه می‌گیریم که برای هر  $y$ ،  $g(y) = a$  و  $f(y) = ay$ . در نهایت با توجه به شرط دوم،  $2a \leq 1395^2$ ، تمامی توابعی که در دو شرط مسأله صدق می‌کنند به صورت  $f(x) = ax$  هستند که  $a$  عددی طبیعی کوچکتر از  $\frac{1395^2}{2}$  است.

دوره سالانه

نخفیف ویژه  
برای تیزلاینی ها

# آکادمی تیزلاین

## برگزاری می کند:



دکتر میثم کوهگرد

کلاس آنلاین المپیاد  
فیزیک (سطح یک)

پنجشنبه‌ها ۱۵:۱۸ تا ۱۹:۳۰

شروع از ۲۷ آبان

۵ جلسه  
۶۰۰ هزار تومان



دکتر افشین بهرام

کلاس آنلاین المپیاد  
ریاضی (سطح یک)

یکشنبه‌ها ۲۰:۱۵ تا ۲۱:۱۵

شروع از ۲۳ آبان

۵ جلسه  
۶۰۰ هزار تومان



دکتر رضا رحمت‌اله زاده

کلاس آنلاین المپیاد  
شیمی (سطح یک)

شنبه‌ها ۲۰:۱۵ تا ۲۱:۱۵

شروع از ۲۲ آبان

۵ جلسه  
۶۰۰ هزار تومان



دکتر قربانی

کلاس آنلاین المپیاد  
زیست‌شناسی (سطح دو)

سه‌شنبه‌ها ۲۰:۱۵ تا ۲۱:۱۵

شروع از ۲۵ آبان

۲۰ جلسه  
۸۰۰ هزار تومان



دکتر میثم کوهگرد

کلاس آنلاین المپیاد  
فیزیک (سطح دو)

پنجشنبه‌ها ۲۰:۱۵ تا ۲۱:۱۵

شروع از ۲۷ آبان

۲۰ جلسه  
۸۰۰ هزار تومان



دکتر قربانی

کلاس آنلاین المپیاد  
زیست‌شناسی (سطح یک)

سه‌شنبه‌ها ۱۵:۱۸ تا ۱۹:۳۰

شروع از ۲۵ آبان

۵ جلسه  
۶۰۰ هزار تومان

#تیزلاینی\_شو



ثبت نام در سایت رسمی



tizline.ir  
www.tizline.ir



۰۲۱-۹۱۳۰۲۲۰۲



۰۲۰۲ ۳۸۴-۰۹۳۳

# آکادمی آموزشی تیزلاین <

## تقویم آموزشی آکادمی تیزلاین

سال ۱۴۰۱-۱۴۰۰

#تیزلاینی\_شو

ترم دو  
دوره  
سالانه

آغاز ثبت نام: ۱ دی

شروع دوره: ۱ بهمن

پایان دوره: ۲۵ اردیبهشت

۱۵ جلسه

ترم یک  
دوره  
سالانه

آغاز ثبت نام: ۱ شهریور

شروع دوره: ۱۰ مهر

پایان دوره: ۱۸ دی

۱۵ جلسه

ترم  
تابستان

آغاز ثبت نام: ۱۰ خرداد

شروع دوره: ۱۲ تیر

پایان دوره: ۲۰ شهریور

۱۰ جلسه

آنلاین تخصص ماست

کلاس ، آزمون ، مشاوره ، تکلیف

ثبت نام در سایت رسمی آکادمی تیزلاین [www.Tizline.ir](http://www.Tizline.ir)

آزمون های هماهنگ از ۲۵ مهر تا ۱۱ اردیبهشت

@mathmovie6

Tizline.ir

[www.Tizline.ir](http://www.Tizline.ir)

@tizline

۰۹۳۳ ۳۸۴ ۰۲۰۲

۵۰۰۰۲۶۹۱۳۲۴

۰۲۱ ۴۴۱۳ ۶۹۷۵

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور