



آکادمی آنلاین تیزلاین قوی ترین پلتفرم آموزشی تیز هوشان

برگزار کننده کلاس های آنلاین و حضوری تیز هوشان ✓

و المپیاد از پایه چهارم تا دوازدهم

آزمون های آنلاین و حضوری ✓

مشاوره تخصصی ✓

با اسکن QR کد روبرو
وارد صفحه اینستاگرام
آکادمی تیزلاین شو و از
محتوای آموزشی
رایگان لذت ببر



برای ورود به صفحه اصلی سایت آکادمی تیزلاین کلیک کنید

برای دانلود دفترچه آزمون های مختلف برای هر پایه کلیک کنید

برای مطالعه مقالات بروز آکادمی تیزلاین کلیک کنید

سوالات و راه‌حل‌های مرحله دوم سی و سومین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۹۴

۱. فرض کنید آرش و بهرام کیکی به شکل دایره را با چند برش نامنظم از وسط، به قطعاتی نابرابر تقسیم کرده‌اند. در ابتدا آرش می‌تواند یکی از قطعات را به دل‌خواه بردارد. سپس بهرام فقط حق دارد یکی از دو قطعه‌ای را بردارد که قطعه مجاورش برداشته شده باشد و به همین ترتیب، هر کس در نوبت خود فقط حق دارد قطعه‌ای را بردارد که در یکی از مراحل قبلی قطعه مجاورش برداشته شده باشد. ثابت کنید اگر در ابتدا کیک به هر شکل پنج قطعه شده باشد، آرش، با دانستن وزن قطعات، می‌تواند طوری عمل کند که دست‌کم نصف کیک به او برسد.

۲. کامپیوتری داریم که می‌تواند در حافظه خود عبارات جبری را ذخیره کند. حافظه کامپیوتر نامحدود است و در ابتدا فقط عبارت x در حافظه آن ذخیره شده است. با این کامپیوتر می‌توان اعمال زیر را انجام داد:

- هرگاه عبارت جبری f در حافظه کامپیوتر باشد، می‌توان $\frac{1}{f}$ را نیز در حافظه اش ذخیره کرد (به شرط این که f متحد با صفر نباشد).
- هرگاه عبارت‌های جبری f و g در حافظه کامپیوتر باشند، می‌توان $f + g$ و $f - g$ را نیز در حافظه اش ذخیره کرد. (f و g می‌توانند یکسان باشند).

به عنوان مثال می‌توان این عبارات را در حافظه ذخیره کرد: $\frac{1}{x}$ ، $x - \frac{1}{x}$ ، $\frac{1}{x - \frac{1}{x}}$ ، $\frac{1}{x} + \frac{1}{x - \frac{1}{x}}$ و ... همه اعداد طبیعی n را بیابید که بتوان عبارت x^n و یا عبارتی متحد با آن را در حافظه ذخیره کرد. (دو عبارت جبری با متغیر x را متحد می‌گوییم اگر برای هر مقدار x که در دامنه هر دو باشد، برابر باشند).

۳. دایره دلخواهی که از رئوس B و C مثلث ABC می‌گذرد، اضلاع AC و AB را به ترتیب در نقاط D و E قطع می‌کند. اگر P محل تقاطع BD و CE باشد و H پای عمود رسم شده از P بر AC باشد و M و N به ترتیب وسط‌های BC و AP باشند، ثابت کنید مثلث‌های MNH و CAE متشابه‌اند.

سوالات و راه حل های مرحله دوم سی و سومین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۹۴

۴. در چهارضلعی $ABCD$ ، AC نیمساز زاویه A است و $\angle ADC = \angle ACB$. X و Y به ترتیب، پای عمودهای رسم شده از A بر BC و CD هستند. ثابت کنید مرکز ارتفاعی مثلث AXY روی خط BD است. (مرکز ارتفاعی یک مثلث، محل برخورد ارتفاع های آن است.)

۵. محیط یک دایره را با $2n$ نقطه به $2n$ قسمت مساوی تقسیم کرده ایم. $n + 1$ بازه به طول های $1, 2, \dots, n + 1$ روی این دایره به نحوی قرار دارند که سر و ته آنها روی این نقاط است. نشان دهید یکی از این بازه ها کاملاً درون دیگری است.

۶. $n \geq 50$ عددی طبیعی است. نشان دهید می توان n را به صورت جمع دو عدد طبیعی نوشت که عوامل اول هر کدام از آن دو عدد از \sqrt{n} بزرگ تر نباشند. برای مثال، 94 را می توان به صورت $14 + 80$ نوشت که هیچ یک از عوامل اول این دو عدد از $\sqrt{94}$ بزرگ تر نیستند.

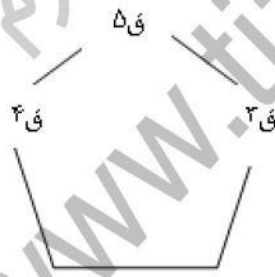
آکادمی آموزشی تیزلاین <

سوالات و راه‌حل‌های مرحله دوم سی و سومین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۹۴

۱. فرض کنید آرش و بهرام کیکی به شکل دایره را با چند برش نامنظم از وسط، به قطعاتی نابرابر تقسیم کرده‌اند. در ابتدا آرش می‌تواند یکی از قطعات را به دل‌خواه بردارد. سپس بهرام فقط حق دارد یکی از دو قطعه‌ای را بردارد که قطعه مجاورش برداشته شده باشد و به همین ترتیب، هر کس در نوبت خود فقط حق دارد قطعه‌ای را بردارد که در یکی از مراحل قبلی قطعه مجاورش برداشته شده باشد. ثابت کنید اگر در ابتدا کیک به هر شکل پنج قطعه شده باشد، آرش، با دانستن وزن قطعات، می‌تواند طوری عمل کند که دست کم نصف کیک به او برسد.
راه حل.

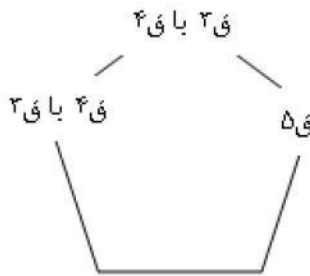
قطعات را از سبک به سنگین، ق ۱ تا ق ۵ می‌نامیم. واضح است که اگر آرش (ق ۵ و ق ۴) یا (ق ۵ و ق ۳) را به دست آورد، به نیمی از کیک رسیده است زیرا بهرام دو قطعه را دارد که هر کدام از یکی از این دو قطعه سبک‌تر است. اکنون با توجه به موقعیت سه قطعه سنگین‌تر نسبت به هم، مسأله را در چهار حالت مختلف حل می‌کنیم:

حالت اول. ق ۳، ق ۴ و ق ۵ کنار هم باشند و ق ۵ وسطی باشد. در این صورت کافی است آرش ق ۵ را بردارد زیرا او در مرحله بعد می‌تواند یکی از ق ۳ یا ق ۴ را بردارد.



شکل ۱: حالت اول

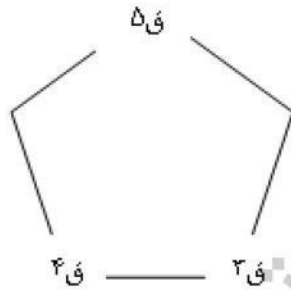
حالت دوم. ق ۳، ق ۴ و ق ۵ در کنار هم باشند و ق ۵ وسط نباشد. در این حالت هم اگر آرش ق ۵ را بردارد، با هر انتخابی که بهرام انجام دهد آرش در مرحله بعد می‌تواند یکی از ق ۴ یا ق ۳ را بردارد.



شکل ۲: حالت دوم

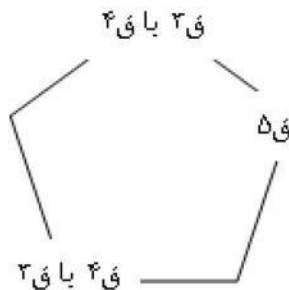
سوالات و راه‌حل‌های مرحله دوم سی و سومین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۹۴

حالت سوم. ق ۳، ق ۴ هیچ‌کدام مجاور ق ۵ نباشند. در این حالت هم اگر آرش ق ۵ را بردارد، با هر انتخابی که بهرام انجام دهد آرش در مرحله بعد می‌تواند یکی از ق ۴ یا ق ۳ را بردارد.



شکل ۳: حالت سوم

حالت چهارم. یکی از ق ۳ یا ق ۴ مجاور ق ۵ باشد و دیگری مجاور این دو نباشد. در این صورت روش آرش بستگی به این دارد که آیا جمع ق ۳ و ق ۴ کمتر از نصف است یا نه. اگر کمتر بود، ق ۵ را برمی‌دارد و در ادامه در بهترین حالت بهرام به ق ۳ و ق ۴ می‌رسد. در غیر این صورت (یعنی حالتی که جمع ق ۳ و ق ۴ دست‌کم نصف است)، در این صورت آرش باید از بین ق ۳ و ق ۴ آنی که مجاور ق ۵ نیست را بردارد. هر قطعه‌ای که بهرام در نوبت بعد بردارد، آرش یا به ق ۵ یا به قطعه باقی‌مانده از بین ق ۳ و ق ۴ دسترسی خواهد یافت و لذا از بین ق ۳، ق ۴ و ق ۵ دو تایش به آرش می‌رسد که طبق فرض این قسمت از نصف کمتر نیست.



شکل ۴: حالت چهارم

سوالات و راه‌حل‌های مرحله دوم سی و سومین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۹۴

۲. کامپیوتری داریم که می‌تواند در حافظه خود عبارات جبری را ذخیره کند. حافظه کامپیوتر نامحدود است و در ابتدا فقط عبارت x در حافظه آن ذخیره شده است. با این کامپیوتر می‌توان اعمال زیر را انجام داد:

- هرگاه عبارت جبری f در حافظه کامپیوتر باشد، می‌توان $\frac{1}{f}$ را نیز در حافظه‌اش ذخیره کرد (به شرط این که f متحد با صفر نباشد).

- هرگاه عبارت‌های جبری f و g در حافظه کامپیوتر باشند، می‌توان $f + g$ و $f - g$ را نیز در حافظه‌اش ذخیره کرد. (f و g می‌توانند یکسان باشند).

به عنوان مثال می‌توان این عبارات را در حافظه ذخیره کرد: $\frac{1}{x}$ ، $x - \frac{1}{x}$ ، $\frac{1}{x - \frac{1}{x}}$ ، $\frac{1}{x - \frac{1}{x}} + \frac{1}{x}$ و ... همه اعداد طبیعی n را بیابید که بتوان عبارت x^n و یا عبارتی متحد با آن را در حافظه ذخیره کرد. (دو عبارت جبری با متغیر x را متحد می‌گوییم اگر برای هر مقدار x که در دامنه هر دو باشد، برابر باشند).
راه حل.

ثابت می‌کنیم جواب مسأله، اعداد طبیعی فرد است.

اولاً توجه کنید که هر عبارتی که بتوان در حافظه ذخیره کرد، تابعی فرد است زیرا عبارت x که در ابتدا در حافظه کامپیوتر است تابعی فرد است و نیز اگر f و g توابعی فرد باشند، $\frac{1}{f}$ ، $f + g$ و $f - g$ نیز توابعی فرد هستند.

پس برای n های زوج، نمی‌توان x^n و یا عبارتی متحد با آن را در حافظه ذخیره کرد. اکنون نشان می‌دهیم برای n فرد، می‌توان عبارتی متحد با x^n را در حافظه ذخیره کرد.

این ادعا را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. فرض کنید $n = 2k + 1$. پایه استقرا برای $k = 0$ واضح است. اکنون فرض کنید توانسته‌ایم عبارت‌های x ، x^3 ، x^5 ، ...، x^{2k-1} (یا عبارتهایی متحد با آنها) را در حافظه ذخیره کنیم. بنابراین می‌توانیم $x^{2k-3} + x^{2k-1}$ و نیز $\frac{1}{x^{2k-1}}$ را نیز در حافظه ذخیره کنیم. حال به ترتیب عبارات زیر را در حافظه ذخیره می‌کنیم:

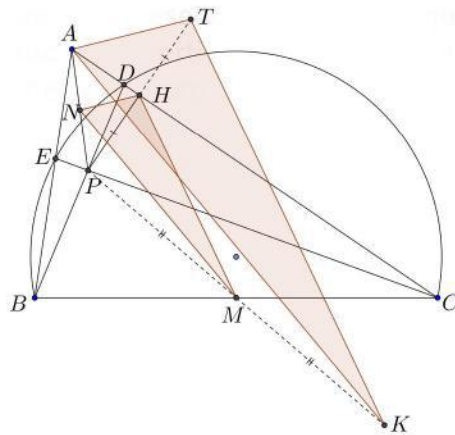
$$x^{2k-1} + x^{2k-3} \Rightarrow \frac{1}{x^{2k-1} + x^{2k-3}} \Rightarrow \frac{1}{x^{2k-1}} - \frac{1}{x^{2k-1} + x^{2k-3}} \equiv \frac{1}{x^{2k+1} + x^{2k-1}}$$

$$\Rightarrow x^{2k+1} + x^{2k-1} \Rightarrow x^{2k+1}$$

پس توانستیم x^{2k+1} را نیز در حافظه ذخیره کنیم و حکم استقرا ثابت شد.

۳. دایره دلخواهی که از رئوس B و C مثلث ABC می گذرد، اضلاع AC و AB را به ترتیب در نقاط E و D قطع می کند. اگر محل تقاطع BD و CE باشد و H پای عمود رسم شده از P بر AC باشد و M و N به ترتیب وسط های BC و AP باشند، ثابت کنید مثلث های MNH و CAE متشابه اند. راه حل.

قرینه ی نقطه ی P نسبت به H و M را به ترتیب T و K می نامیم. در این صورت ادعا می کنیم مثلث های MNH و KAT هم نهشت هستند. برای این ادعا توجه کنید که $PH = HT$, $PN = NA$ و $PM = MK$ است. پس طبق قضیه ی تالس اضلاع این دو مثلث با هم موازی هستند و بنابراین ادعا ثابت شده است. از طرف دیگر با توجه به $\angle EBD = \angle ECD$ و برابری زاویه ی $\angle BAC$ در دو مثلث ACE و ABD این دو مثلث متشابه هستند. بنابراین برای اثبات حکم مسئله کافی است ثابت کنیم که دو مثلث AKT و ABD متشابه هستند. یعنی کافی است ثابت کنیم که $\angle BAD = \angle KAT$ و هم چنین $\frac{AB}{AD} = \frac{AK}{AT}$

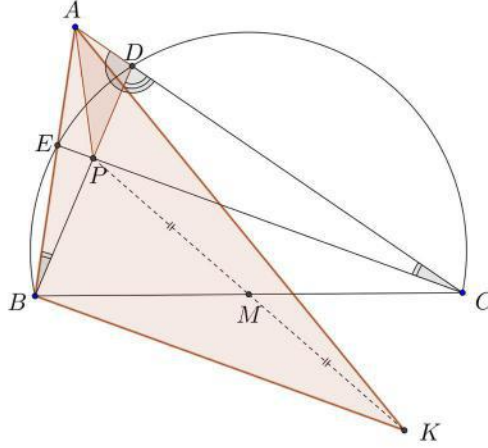


دقت کنید که این احکام معادل متشابه بودن مثلث های ABK و ADT است (چون $\angle BAD = \angle KAT$ اگر و تنها اگر $\angle BAK = \angle DAT$). اما با توجه به این که T از قرینه کردن P نسبت به ضلع AC به دست آمده بود، مثلث های ADT و ADP با هم هم نهشت هستند و بنابراین برای اثبات حکم باید نشان دهیم که دو مثلث ABK و ADP متشابه هستند. چون در چهارضلعی $BKCP$ قطرهای یک دیگر را نصف کرده اند، این چهارضلعی یک متوازی الاضلاع است و لذا $BK \parallel CE$. این نتیجه می دهد که

$$\angle ABK = \angle AEC = 180^\circ - \angle BEC = 180^\circ - \angle BDC = \angle ADP$$

از سوی دیگر توجه کنید که مجدداً با توجه به این که $BKCP$ متوازی الاضلاع است، $BK = CP$. پس برای کامل شدن اثبات تشابه دو مثلث باید نشان دهیم $\frac{AD}{DP} = \frac{AB}{BK} = \frac{AB}{CP}$

سوالات و راه‌حل‌های مرحله دوم سی و سومین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۹۴



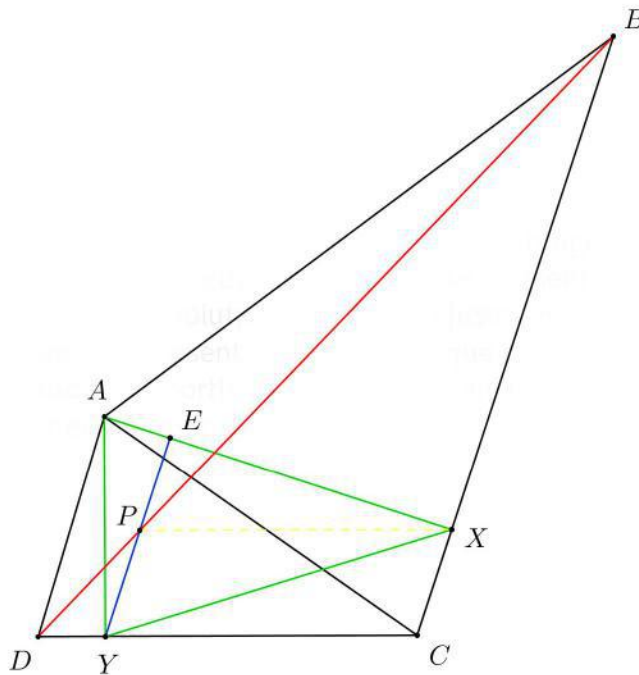
برای این هم طبق قضیه‌ی سینوس‌ها در مثلث‌های ABD و PDC باید ثابت کنیم:

$$\frac{\sin(\angle ABD)}{\sin(\angle ADB)} = \frac{\sin(\angle DCP)}{\sin(\angle CDP)}$$

اما $\angle ABD = \angle DCP$ و $\angle ADB = 180^\circ - \angle CDP$ است، پس سینوس‌های این زوایا با هم برابر هستند و بنابراین تساوی مورد نظر ما برقرار هست و بنابراین اثبات حکم مسئله به پایان می‌رسد.

سوالات و راه‌حل‌های مرحله دوم سی و سومین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۹۴

۴. در چهارضلعی $ABCD$ ، AC نیمساز زاویه A است و $\angle ADC = \angle ACB$. X و Y به ترتیب، پای عمودهای رسم شده از A بر BC و CD هستند. ثابت کنید مرکز ارتفاعی مثلث AXY روی خط BD است. (مرکز ارتفاعی یک مثلث، محل برخورد ارتفاع‌های آن است).
راه حل.



پای عمود وارد از Y بر AX را E می‌نامیم. اگر تقاطع YE با BD را P بنامیم برای اثبات حکم کفایت ثابت کنیم AY عمود است یا معادلاً XP موازی CD است. داریم:

$$YE \parallel CB \Rightarrow \frac{DY}{YC} = \frac{DP}{PB}$$

از طرفی

$$\angle ADC \sim \angle ACB \Rightarrow \frac{DY}{YC} = \frac{CX}{XB}$$

پس

$$\frac{DP}{PB} = \frac{CX}{XB}$$

بنابراین طبق عکس قضیه‌ی تالس XP با CD موازی است.

سوالات و راه‌حل‌های مرحله دوم سی و سومین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۹۴

۵. محیط یک دایره را با $2n$ نقطه به $2n$ قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم. $n + 1$ بازه به طول‌های $1, 2, \dots, n + 1$ روی این دایره به نحوی قرار دارند که سر و ته آنها روی این نقاط است. نشان دهید یکی از این بازه‌ها کاملاً درون دیگری است.

راه حل.

فرض کنید حکم برقرار نباشد. در این صورت $n + 1$ بازه با شرایط مسأله وجود دارد که هیچ‌کدام داخل دیگری نیست. بازه به طول 1 را در نظر بگیرید. با توجه به این که هیچ یک از بازه‌های دیگر شامل این بازه نیست، بقیه بازه‌ها با این بازه (مگر احتمالاً در نقاط انتهایی) اشتراک ندارند و اگر درون این بازه را از دایره حذف کنیم و کمان باقی‌مانده را صاف کنیم، چنین چیزی خواهیم داشت:

پاره‌خطی به طول $2n - 1$ که $2n$ نقطه با فاصله‌های واحد روی آن علامت زده شده است. همچنین n بازه با سر و ته این نقاط و به طول‌های $2, \dots, n + 1$ که هیچ کدام شامل دیگری نیست.

حال بازه به طول $n + 1$ را در نظر بگیرید. از آن جایی که هیچ بازه دیگری کاملاً درون این بازه قرار ندارد و بقیه بازه‌ها از آن کوچک‌ترند، هر کدام از این $n - 1$ بازه شامل یک نقطه در سمت چپ و یا یک نقطه در سمت راست بازه به طول $n + 1$ است و فقط یکی از این حالات اتفاق می‌افتد. حال سرهای (یعنی چپ‌ترین نقطه‌های) هر یک از بازه‌های دسته اول را در نظر بگیرید. این نقاط در سمت چپ بزرگترین بازه قرار دارند و متمایز هستند، چون اگر سر دو بازه یکی باشد، بازه بزرگ‌تر بازه کوچک‌تر را می‌پوشاند. به همین ترتیب نقاط ته بازه‌های دسته دوم را در نظر بگیرید که در سمت راست بزرگترین بازه قرار دارند و متمایزند. پس در مجموع باید $n - 1$ نقطه متمایز (سرهای دسته اول و ته‌های دسته دوم) داشته باشیم که همگی از میان نقاط علامت زده شده و بیرون بزرگترین بازه هستند. اما بزرگترین بازه خود شامل $n + 2$ نقطه علامت زده شده است و $n - 2$ نقطه علامت زده شده بیرون آن قرار دارد، پس نمی‌توان $n - 1$ نقطه علامت زده شده بیرون آن انتخاب کرد. پس فرض خلف به تناقض می‌انجامد و حکم ثابت می‌شود.

۶. $n \geq 50$ عددی طبیعی است. نشان دهید می توان n را به صورت جمع دو عدد طبیعی نوشت که عوامل اول هر کدام از آن دو عدد از \sqrt{n} بزرگتر نباشند. برای مثال، ۹۴ را می توان به صورت $80 + 14$ نوشت که هیچ یک از عوامل اول این دو عدد از $\sqrt{94}$ بزرگتر نیستند.
راه حل.

از آن جا که در طول راه حل بارها از عبارت ((عوامل اول x از y بیش تر نیستند))، استفاده می کنیم، در همین ابتدا نماد \sqsubseteq را برای نمایش این مفهوم قرارداد می کنیم. به این صورت که $x \sqsubseteq y$ یعنی همه عوامل اول x کم تر یا مساوی y هستند.
دو نکته ساده ما را در رسیدن به این نمایش برای عدد n کمک می کند.

• برای هر عدد طبیعی $x \leq m$ ، $x \sqsubseteq m$ (اگر r عامل اولی بزرگ تر از m داشته باشد، باید $r > m$)

• اگر $r \sqsubseteq m$ و $s \sqsubseteq m$ ، آن گاه $rs \sqsubseteq m$ (هر عامل اول rs عاملی از r یا s است).

به طور خاص این نکته ها نتیجه می دهند که اگر بتوان عدد r را به صورت حاصل ضرب اعدادی کم تر یا مساوی m نوشت $r \sqsubseteq m$ ، برای مثال همواره $m^2 \sqsubseteq m$.

فرض کنید m^2 و $(m+1)^2$ دو مربع کامل متوالی باشند که $m^2 \leq n < (m+1)^2$ پس $n = m^2 + r$ که $0 \leq m \leq 2m$. دقت کنید که در این صورت $[\sqrt{n}] = m$ و باید نشان دهید که n را می توان به صورت $a + b$ نوشت که $a \sqsubseteq m$ و $b \sqsubseteq m$.

مسئله را بر حسب زوج یا فرد بودن m به دو حالت تقسیم می کنیم. (توجه کنید که چون $n \geq 50$ فرض شده است، $m \geq 7$ خواهد بود).

اگر m فرد باشد، $m+1$ زوج است. حال $m+1$ عدد متوالی زیر را در نظر بگیرید:

$$n - (m + 1), n - m, \dots, n - 2, n - 1$$

از بین این $m+1$ عدد متوالی یکی از آن ها مثلاً $n - j = m^2 + r - j$ بر $m+1$ بخش پذیر است. ادعا می کنیم که در این صورت

$$n = \underbrace{(n - j)}_a + \underbrace{j}_b$$

نمایش مطلوب برای n را به دست می دهد. توجه کنید که برای هر $1 \leq j \leq m+1$ داریم $j \sqsubseteq m$ زیرا اگر $j \leq m$ باشد، با توجه به نکته بالا این موضوع واضح است و اگر $j = m+1$ ، آن گاه $m+1 = 2 \left(\frac{m+1}{2}\right) \sqsubseteq m+1$ و چون $2 \leq m$ و $\frac{m+1}{2} \leq m$ مجدداً طبق نکته های بالا $m+1 \sqsubseteq m$ پس در هر صورت $j \sqsubseteq m$ از طرف دیگر با توجه به نحوه تعریف m ، $n - j < (m+1)^2$ و در نتیجه $\frac{n-j}{m+1} < m+1$ پس $\frac{n-j}{m+1} \sqsubseteq m$ و این یعنی می توان نوشت:

$$n = \underbrace{(m+1) \left(\frac{n-j}{m+1}\right)}_a + \underbrace{j}_b$$

سوالات و راه‌حل‌های مرحله دوم سی و سومین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۹۴

که چون $m+1 \sqsubseteq m$ و $\frac{n-j}{m+1} \sqsubseteq m$ نتیجه می‌گیریم که $a \sqsubseteq m$ و بنابراین کار تمام است. در حالتی که m زوج باشد، شبیه به حالت قبل این بار $m+2$ زوج خواهد بود. در این حالت $m+2$ عدد متوالی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$n-m, n-(m-1), \dots, n-1, n, n+1$$

از بین این $n+2$ عدد متوالی حتماً یکی از آن‌ها بر $m+2$ بخش‌پذیر است.

• اگر $1 \leq j \leq m$ یافت شود که $m+2 \mid n-j$ مشابه حالت قبل $\frac{n-j}{m+2} \leq m$ و لذا $\frac{n-j}{m+2} \sqsubseteq m$ از طرف دیگر $m+2 = 2 \left(\frac{m+2}{2}\right)$ که $\frac{m+2}{2} \leq m$ پس $m+2 \sqsubseteq m$. بنابراین در کل $a = n-j$ و $b = j$ نمایش مطلوب ما خواهد بود.

• اگر خود n بر $m+2$ بخش‌پذیر باشد، چون $m+2$ زوج است می‌توان نوشت:

$$n = 2 \left(\frac{m+2}{2}\right) \left(\frac{n}{m+2}\right) = \underbrace{\left(\frac{m+2}{2}\right) \left(\frac{n}{m+2}\right)}_a + \underbrace{\left(\frac{m+2}{2}\right) \left(\frac{n}{m+2}\right)}_b$$

• اگر $m+2 \mid n+1$ چون $(m+1)^2 \leq n+1 \leq m^2+1 \leq m^2+m-2 = (m-1)(m+2) = n+1$ و یا $n+1 = m(m+2)$ (مضرب‌های دیگر $m+2$ بزرگ‌تر از $(m+1)^2$ و یا کوچک‌تر از m^2 هستند). در حالت اول چون $m-3 < a = m^2$ و $b = m-3$ همان نمایش مطلوب است. در حالت دوم $n = (m+1)^2 - 2$ پس می‌توان نوشت:

$$n = (m+1)^2 - 2 = (m+1)^2 - 9 + 7 = (m-2)(m+4) + 7 = \underbrace{2(m-2) \left(\frac{m+4}{2}\right)}_a + \underbrace{7}_b$$

حال چون $m \geq 7$ ، $\frac{m+4}{2} \leq m$ و $a \sqsubseteq m$ و $b \sqsubseteq m$ پس در این حالت هم نمایش مطلوب وجود دارد و بنابراین کار تمام است.

توضیح. توجه کنید که در طول راه‌حل از فرض $m \geq 7$ تنها در آخرین استدلال استفاده شد و در مابقی استدلال‌ها فرض $m \geq 4$ ($n \geq 16$) کفایت می‌کرد. با توجه به این نکته استدلال بالا حکم مسئله را برای همه اعداد طبیعی مگر اعداد به شکل $m^2 + 2m - 1$ که m عددی زوج و کم‌تر از ۷ است نتیجه می‌دهد. این چنین عددی برای $m = 6$ برابر ۴۷ است که می‌توان آن را به صورت $15 + 32$ نوشت. در مورد $m = 4$ هم به عدد ۲۳ برمی‌خوریم که می‌توان به سادگی دید که چنین نمایشی ندارد. در واقع حکم مسئله برای همه اعداد بزرگ‌تر از ۷ به جز ۲۳ درست است.

دوره سالانه

نخفیف ویژه
برای تیزلاینی ها

آکادمی تیزلاین

برگزاری می کند:



دکتر میثم کوهگرد

کلاس آنلاین المپیاد
فیزیک (سطح یک)

پنجشنبه‌ها ۱۵:۱۸ تا ۱۹:۳۰
شروع از ۲۷ آبان

۵ جلسه
۶۰۰ هزار تومان



دکتر افشین بهرام

کلاس آنلاین المپیاد
ریاضی (سطح یک)

یکشنبه‌ها ۲۰:۱۵ تا ۲۱:۱۵
شروع از ۲۳ آبان

۵ جلسه
۶۰۰ هزار تومان



دکتر رضاحمت الهزاده

کلاس آنلاین المپیاد
شیمی (سطح یک)

شنبه‌ها ۲۰:۱۵ تا ۲۱:۱۵
شروع از ۲۲ آبان

۵ جلسه
۶۰۰ هزار تومان



دکتر قربانی

کلاس آنلاین المپیاد
زیست شناسی (سطح دو)

سه شنبه‌ها ۲۰:۱۵ تا ۲۱:۱۵
شروع از ۲۵ آبان

۲۰ جلسه
۸۰۰ هزار تومان



دکتر میثم کوهگرد

کلاس آنلاین المپیاد
فیزیک (سطح دو)

پنجشنبه‌ها ۲۰:۱۵ تا ۲۱:۱۵
شروع از ۲۷ آبان

۲۰ جلسه
۸۰۰ هزار تومان



دکتر قربانی

کلاس آنلاین المپیاد
زیست شناسی (سطح یک)

سه شنبه‌ها ۱۵:۱۸ تا ۱۹:۳۰
شروع از ۲۵ آبان

۵ جلسه
۶۰۰ هزار تومان

#تیزلاینی_شو

ثبت نام در سایت رسمی



tizline.ir
www.tizline.ir



۰۲۱-۹۱۳۰۲۲۰۲



۰۲۰۲ ۳۸۴-۰۹۳۳

آکادمی آموزشی تیزلاین <

تقویم آموزشی آکادمی تیزلاین

سال ۱۴۰۱-۱۴۰۰

#تیزلاینی_شو

ترم دو
دوره
سالانه

آغاز ثبت نام: ۱ دی

شروع دوره: ۱ بهمن

پایان دوره: ۲۵ اردیبهشت

۱۵ جلسه

ترم یک
دوره
سالانه

آغاز ثبت نام: ۱ شهریور

شروع دوره: ۱۰ مهر

پایان دوره: ۱۸ دی

۱۵ جلسه

ترم
تابستان

آغاز ثبت نام: ۱۰ خرداد

شروع دوره: ۱۲ تیر

پایان دوره: ۲۰ شهریور

۱۰ جلسه

آنلاین تخصص ماست

کلاس ، آزمون ، مشاوره ، تکلیف

ثبت نام در سایت رسمی آکادمی تیزلاین www.Tizline.ir

آزمون های هماهنگ از ۲۵ مهر تا ۱۱ اردیبهشت

@mathmovie6

Tizline.ir

www.Tizline.ir

@tizline

۰۹۳۳ ۳۸۴ ۰۲۰۲

۵۰۰۰۲۶۹۱۳۲۴

۰۲۱ ۴۴۱۳ ۶۹۷۵

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور