



# آکادمی آنلاین تیزلاین قوی ترین پلتفرم آموزشی تیز هوشان

برگزار کننده کلاس های آنلاین و حضوری تیز هوشان ✓

و المپیاد از پایه چهارم تا دوازدهم

آزمون های آنلاین و حضوری ✓

مشاوره تخصصی ✓

با اسکن QR کد روبرو  
وارد صفحه اینستاگرام  
آکادمی تیزلاین شو و از  
محتواهای آموزشی  
رایگان لذت ببر



برای ورود به صفحه اصلی سایت آکادمی تیزلاین کلیک کنید

برای دانلود دفترچه آزمون های مختلف برای هر پایه کلیک کنید

برای مطالعه مقالات بروز آکادمی تیزلاین کلیک کنید

به نام او

روز اول

۱. فروشگاهی مسئول پخش ۱۰۰ سبد کالا است. هر سبد باید شامل ۱۰ کیلوگرم برنج و ۳۰ عدد تخم‌مرغ باشد. می‌دانیم که مجموعاً ۱۰۰۰ کیلوگرم برنج و ۳۰۰۰ عدد تخم‌مرغ در سبدها وجود دارد ولی در برخی سبدها مقدار این دو کالا کم‌تر یا بیش‌تر از مقدار یادشده است. کارمندان فروش‌گاه می‌توانند در هر مرحله دو سبد را انتخاب و هر مقدار دل‌خواه برنج و هر تعداد تخم‌مرغ آن دو سبد را جابه‌جا کنند. دست‌کم در چند مرحله می‌توان، با شروع از هر وضعیت اولیه‌ای، برنج و تخم‌مرغ همه سبدها را با هم برابر کرد؟

۲. مربع  $ABCD$  مفروض است. دو نقطه  $N$  و  $P$ ، به ترتیب، روی اضلاع  $AB$  و  $AD$  به شکلی انتخاب شده‌اند که  $PN = NC$  و نقطه  $Q$  روی پاره‌خط  $AN$  طوری انتخاب شده که  $\widehat{NCB} = \widehat{QPN}$ . ثابت کنید

$$\widehat{BCQ} = \frac{1}{2} \widehat{PQA}.$$

۳. اعداد حقیقی و نامنفی  $x$ ،  $y$  و  $z$  مفروض هستند. می‌دانیم

$$2(xy + yz + zx) = x^2 + y^2 + z^2.$$

ثابت کنید

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{2xyz}.$$

موفق باشید

به نام او

روز دوم

۴. تمام جواب‌های طبیعی معادله زیر را بیابید.

$$n^{n^n} = m^m$$

۵. زیرمجموعه ناتهی از اعداد حقیقی مثبت مانند  $S$  را «توانا» گوییم در صورتی که هرگاه  $a$  و  $b$  دو عضو متمایز آن باشند آن‌گاه دست‌کم یکی از اعداد  $a^b$  یا  $b^a$  عضو  $S$  باشند.

الف. یک مجموعه توانای چهار عضوی مثال بزنید.

ب. ثابت کنید یک مجموعه توانای متناهی بیش از چهار عضو ندارد.

۶. در انجمن «معمابازان حرفه‌ای»، اعضا به تعدادی گروه تقسیم شده‌اند و در پایان هر هفته گروه‌بندی‌ها به شکل خاصی تغییر می‌کند؛ در هر گروه یکی از اعضا به عنوان بهترین عضو مشخص می‌شود و همه به‌ترین‌های گروه‌ها از گروه خود جدا شده و یک گروه جدید را تشکیل می‌دهند. اگر گروهی فقط یک عضو داشته باشد همان عضو به گروه جدید می‌رود و گروه قبلی منحل می‌شود. فرض کنید انجمن  $n$  عضو دارد و در ابتدا همه اعضا در یک گروه بوده باشند. ثابت کنید هفته‌ای فرا می‌رسد که از آن به بعد تعداد اعضای تمام گروه‌ها حداکثر  $1 + \sqrt{2n}$  است.

موفق باشید

سوالات و راه‌حل‌های مرحله دوم سی و دومین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۹۳

۱. فروش گاهی مسئول پخش ۱۰۰ سبد کالا است. هر سبد باید شامل ۱۰ کیلوگرم برنج و ۳۰ عدد تخم‌مرغ باشد. می‌دانیم که مجموعاً ۱۰۰۰ کیلوگرم برنج و ۳۰۰۰ عدد تخم‌مرغ در سبدها وجود دارد ولی در برخی سبدها مقدار این دو کالا کم‌تر یا بیش‌تر از مقدار یادشده است. کارمندان فروش گاه می‌توانند در هر مرحله دو سبد را انتخاب و هر مقدار دلخواه برنج و هر تعداد تخم‌مرغ آن دو سبد را جابه‌جا کنند. دست‌کم در چند مرحله می‌توان، با شروع از هر وضعیت اولیه‌ای، برنج و تخم‌مرغ همه سبدها را با هم برابر کرد؟

راه حل. پاسخ مسئله ۹۹ است. ابتدا وضعیت اولیه‌ای را در نظر بگیرید که در آن همه تخم‌مرغ‌ها در یک سبد باشند. در این صورت در هر مرحله حداکثر یک سبد جدید دارای تخم‌مرغ می‌شود. بنابراین حداقل ۹۹ مرحله لازم است تا همه سبدها دارای تخم‌مرغ شوند. اکنون ادعا می‌کنیم با هر وضعیت اولیه در ۹۹ مرحله می‌توان همه سبدها را درست کرد. (درست یعنی شامل ۱۰ کیلوگرم برنج و ۳۰ عدد تخم‌مرغ) در هر مرحله، از بین سبدهایی که هنوز درست نشده‌اند، سبدی با بیشترین میزان برنج و سبدی با بیشترین تعداد تخم‌مرغ را در نظر بگیرید. به وضوح سبد اول حداقل ۱۰ کیلوگرم برنج دارد و سبد دوم حداقل ۳۰ عدد تخم‌مرغ دارد. (ممکن است این دو سبد یکی باشند، در این صورت همین سبد و یک سبد دل‌خواه دیگر را انتخاب کنید.) با جابجایی اجناس بین این دو سبد می‌توان یک سبد با دقیقاً ۱۰ کیلوگرم برنج و دقیقاً ۱۰ عدد تخم‌مرغ ساخت. بنابراین در هر مرحله می‌توان حداقل یک سبد را درست کرد، پس از ۹۹ مرحله ۹۹ سبد درست شده‌اند، پس سبد آخر نیز خود به خود درست شده است.

سوالات و راه حل های مرحله دوم سی و دومین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۹۳

۲. مربع  $ABCD$  مفروض است. دو نقطه  $P$  و  $N$ ، به ترتیب، روی اضلاع  $AB$  و  $AD$  به شکلی انتخاب شده اند که  $PN = NC$  و نقطه  $Q$  روی پاره خط  $AN$  طوری انتخاب شده که  $\widehat{NCB} = \widehat{QPN}$ . ثابت کنید:

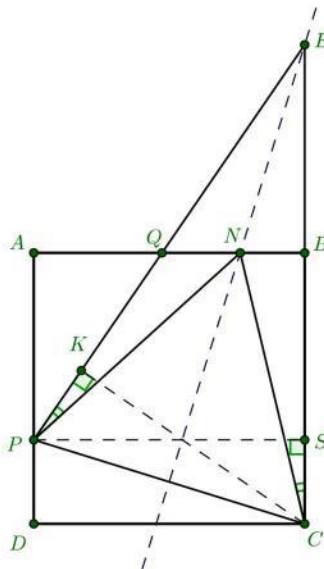
$$\widehat{BCQ} = \frac{1}{2}\widehat{PQA}.$$

راه حل. خط  $PQ$  را امتداد می دهیم تا خط  $BC$  را در نقطه  $E$  قطع کند. طبق فرض  $PN = NC$  پس  $\angle NPC = \angle PCN$ . همچنین می دانیم  $\angle QPN = \angle NCB$ . از جمع این دو رابطه درمی یابیم مثلث  $EPC$  متساوی الساقین است. در این مثلث ارتفاع های  $CK$  و  $PS$  را رسم می کنیم. چون مثلث  $EPC$  متساوی الساقین است  $PS = CK$ . از طرفی  $PS$  برابر طول ضلع مربع است پس  $CK = CB$ . در چهارضلعی  $QBCK$  مجموع زاویه های  $\angle QBC$  و  $\angle CKQ$  برابر  $180^\circ$  درجه است. در نتیجه این چهارضلعی محاطی است و

$$\angle BCK = \angle AQP.$$

توجه کنید که دو مثلث قائم الزاویه  $CBQ$  و  $CKQ$  به حالت وتر و یک ضلع ( $CQ = CQ, CK = CB$ ) همنهشت هستند. بنابراین  $QC$  نیمساز  $\angle KQB, \angle KCB$  است و

$$\angle BCQ = \frac{\angle KCB}{2} = \frac{\angle AQP}{2}.$$



سوالات و راه حل های مرحله دوم سی و دومین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۹۳

۳. اعداد حقیقی و نامنفی  $x, y$  و  $z$  مفروض هستند. می دانیم:

$$2(xy + xz + zy) = x^2 + y^2 + z^2.$$

ثابت کنید:

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{2xyz}.$$

راه حل نخست:

فرض کنید  $x \geq y \geq z$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(xy + yz + zx)$$

$$\Rightarrow 1x^2 + x(-2y - 2z) + y^2 + z^2 - 2yz = 0$$

$$\Rightarrow x = (y + z) \pm \sqrt{(y + z)^2 - y^2 - z^2 + 2yz} = (y + z) \pm 2\sqrt{yz} = (y + z) \pm 2\sqrt{yz} = (\sqrt{y} \pm \sqrt{z})^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} - \sqrt{z} \text{ یا } \sqrt{x} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

که با فرض  $x \geq y \geq z$  تنها حالت  $\sqrt{x} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$  یا معادلا  $x = y + z + 2\sqrt{yz}$  رخ می دهد. حال با جای گذاری  $x$  در حکم به نابرابری معادل زیر می رسیم

$$\frac{y + z + 2\sqrt{yz} + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{2(y + z + 2\sqrt{yz})yz}$$

برای اثبات نابرابری بالا ابتدا فرض کنیم  $y = 0$  ولی در این حالت حکم اصلی مسئله واضح است چون سمت راست صفر و سمت چپ مثبت است. حال فرض کنید  $y$  مخالف صفر است ( $y = 0$  بدیهی است) و دو طرف حکم معادل بالا را بر  $y$  تقسیم کنید و فرض کنید  $\frac{z}{y} = t$  پس باید ثابت کنیم:

$$\frac{2t + 2\sqrt{t} + 2}{3} \geq \sqrt[3]{2(t + 1 + 2\sqrt{t})t}$$

که این هم با استفاده از نابرابری حسابی-هندسی به دست می آید:

$$\begin{aligned} \frac{2t + 2\sqrt{2t} + 2}{3} &= \frac{(\sqrt{t} + 1) + (\sqrt{t} + 1) + 2t}{3} \geq \sqrt[3]{(\sqrt{t} + 1)^2 2t} \\ &= \sqrt[3]{2(t + 1 + 2\sqrt{t})t} \end{aligned}$$

سوالات و راه حل های مرحله دوم سی و دومین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۹۳

راه حل دوم:

فرض کنید  $x \geq y \geq z$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(xy + yz + zx)$$

$$\Rightarrow x^2 + x(-2y - 2z) + y^2 + z^2 - 2yz = 0$$

$$\Rightarrow x = (y + z) \pm \sqrt{(y + z)^2 - y^2 - z^2 + 2yz} = (y + z) \pm 2\sqrt{yz} = (y + z) \pm 2\sqrt{yz} = (\sqrt{y} \pm \sqrt{z})^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} - \sqrt{z} \text{ یا } \sqrt{x} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

که با فرض  $x \geq y \geq z$  تنها حالت  $\sqrt{x} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$  یا معادلا

$$x = y + z + 2\sqrt{yz}$$

رخ می دهد. حال با جایگذاری  $x$  در حکم به نابرابری معادل زیر می رسیم

$$\frac{y + z + 2\sqrt{yz} + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{2(y + z + 2\sqrt{yz})yz}$$

فرض کنید  $A = \frac{y + z}{2}$  و  $B = \sqrt{yz}$  حال چون  $A \geq B$  (نابرابری حسابی-هندسی) می توان فرض کرد  $A = B + e$  که  $e \geq 0$  در این صورت با جای گذاری  $A = B + e$  در رابطه قبل به حکم معادل زیر می رسیم

$$2B + \frac{4e}{3} \geq \sqrt[3]{2(4B + 2e)B^2}$$

حال اگر دو طرف را به توان سه برسانیم به حکم معادل زیر می رسیم

$$(2B + \frac{4e}{3})^3 \geq 8B^3 + 4eB^2$$

اما داریم:

$$(2B + \frac{4e}{3})^3 = 8B^3 + 3(2B)^2 \frac{4e}{3} + 6B(\frac{4e}{3})^2 + (\frac{4e}{3})^3 \geq 8B^3 + 16B^2e \geq 8B^3 + 4eB^2$$

پس رابطه مورد نظر ثابت شد.

۴. تمام جواب‌های طبیعی معادلهٔ زیر را بیابید.

$$n^{n^n} = m^m.$$

راه حل نخست:

عدد طبیعی  $k$  و عدد صحیح نامنفی  $t$  را طوری انتخاب می‌کنیم که  $k$  بر  $n$  بخش‌پذیر نباشد و  $m = kn^t$  (ابتدا  $t$  را بزرگ‌ترین عدد صحیح نامنفی در نظر می‌گیریم که  $m$  بر  $n^t$  بخش‌پذیر باشد، سپس  $k$  را برابر حاصل تقسیم  $m$  بر  $n^t$  در نظر می‌گیریم.) با این جای‌گذاری در تساوی اصلی خواهیم داشت

$$n^{n^n} = m^m = (kn^t)^{kn^t}$$

از دو طرف رادیکال به فرجهٔ  $n^t$  می‌گیریم

$$n^{n^{n-t}} = (kn^t)^k = k^k n^{kt}$$

دو طرف را بر  $n^{kt}$  تقسیم می‌کنیم

$$n^{n^{n-t}-kt} = k^k \quad (1)$$

اگر  $t \geq n$  آن‌گاه  $m = kn^t \geq n^t \geq n^n$  پس  $m \geq n^n$  و در نتیجه

$$m^m = n^{n^n} \leq n^m \Rightarrow m \leq n \Rightarrow n^n \leq n \Rightarrow n \leq 1 \Rightarrow n = 1$$

و جواب  $m = n = 1$  به دست می‌آید.

اما اگر  $n > t$  آن‌گاه  $n - t$  مثبت است و  $n^{n-t} - kt$  عددی صحیح. فرض کنید  $s = n^{n-t} - kt$ ، در این صورت  $n^s = k^k$ . اگر  $s < 0$  آن‌گاه یک طرف تساوی اخیر ناصحیح می‌شود، در حالی که طرف دیگر صحیح است. اگر  $s = 0$  آن‌گاه  $k = 1$  که در انتها بررسی شده. فرض کنیم  $s > 0$ ، در این صورت اگر عدد اولی تنها یکی از  $n$  و  $k$  را بشمارد آن‌گاه این عدد اول تنها یکی از دو طرف تساوی  $n^s = k^k$  را می‌شمارد که این ممکن نیست. پس عوامل اول  $n$  و  $k$  یکسان‌اند. فرض کنید  $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$  و  $k = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}$  تجزیهٔ این دو عدد به عوامل اولشان باشد، در این صورت

$$n^s = k^k \Rightarrow (p_1^{\alpha_1})^s \cdots (p_r^{\alpha_r})^s = (p_1^{\beta_1})^k \cdots (p_r^{\beta_r})^k$$

از برابری توان‌های هر عدد اول در دو طرف تساوی نتیجه می‌گیریم

$$p_i^{\alpha_i s} = p_i^{\beta_i k} \Rightarrow \alpha_i s = \beta_i k \Rightarrow \frac{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{k}{s}$$

اگر  $s \geq k$  آن‌گاه  $\beta_i \geq \alpha_i$  و در نتیجه  $k$  بر  $n$  بخش‌پذیر است که خلاف فرض اولیه است.



سوالات و راه‌حل‌های مرحله دوم سی و دومین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۹۳

اگر  $k > s$  آن‌گاه  $\alpha_i > \beta_i$  و در نتیجه  $n$  بر  $k$  بخش پذیر است. پس  $n^{n-t}$  هم بر  $k$  بخش پذیر است. از دو طرف تساوی (۱) رادیکال فرجه  $k$  می‌گیریم

$$n^{\frac{n-t}{k}-t} = k$$

چون توان  $n$  در این عبارت صحیح است و  $k$  مضربی از  $n$  نیست به ناچار  $s = 0$  و  $k = 1$ . یعنی  $n^{n-t} - t = 0$  اما

$$t = n^{n-t} \geq n^1 \geq n > t$$

و به تناقض می‌رسیم.

راه حل دوم:

ابتدا توجه کنید که اگر  $n = 1$  آن‌گاه  $m = 1$  و جواب  $m = n = 1$  به دست می‌آید. از این به بعد فرض می‌کنیم  $n > 1$ . فرض کنیم  $r = \log_n m$  در این صورت  $m = n^r$  و

$$n^{n^n} = m^m = (n^r)^{n^r} = n^{rn^r}$$

چون  $n > 1$  باید توان‌های  $n$  در دو طرف برابر باشد

$$n^n = rn^r \Rightarrow r = n^{n-r} \quad (2)$$

از طرفی با گرفتن لگاریتم (پایه  $n$ ) از دو طرف تساوی  $n^{n^n} = m^m$  به دست می‌آوریم

$$n^n = m \log_n m \Rightarrow r = \frac{n^n}{m} \quad (3)$$

لم. اگر به ازای عددی طبیعی مثل  $n$  و عددهایی گویا و مثبت مثل  $p$  و  $q$  تساوی  $n^p = q$  برقرار شود آن‌گاه  $q$  عددی طبیعی است.

اثبات. فرض کنید  $p = \frac{a}{b}$  و  $q = \frac{c}{d}$  نمایش‌های کسری این دو عدد گویا باشند. در این صورت

$$n^p = q \Rightarrow n^{\frac{a}{b}} = \frac{c}{d} \Rightarrow n^a = \left(\frac{c}{d}\right)^b = \frac{c^b}{d^b} \Rightarrow d^b | c^b \Rightarrow d | c \Rightarrow q \in \mathbb{N}$$

ادامه راه‌حل. بنابر تساوی (۲)  $r$  گویاست و بنابر تساوی (۱)، با فرض  $p = n - r$  و  $q = r$  داریم  $n^p = q$  گویا بودن  $p$  و  $q$  نتیجه مستقیم گویا بودن  $r$  است. پس بنابر لم،  $q$  باید عددی طبیعی باشد. یعنی  $r$  عددی طبیعی است.

اگر  $n < r$  آن‌گاه  $n^{n-r} \geq n^1 > r$  در نتیجه تساوی امکان پذیر نیست.

اگر  $r > n$  آن‌گاه  $n^{n-r} < 1 < r$  در نتیجه باز هم تساوی ممکن نیست.

اگر  $n = r$  آن‌گاه  $r = n^{n-r} = 1$  پس  $n = r = 1$  که خلاف فرض  $n > 1$  است.

در نتیجه تنها جواب  $m = n = 1$  است.

۵. زیرمجموعه ناتهی از اعداد حقیقی مثبت مانند  $S$  را «توانا» گوئیم در صورتی که هرگاه  $a$  و  $b$  دو عضو متمایز آن باشند آن گاه دست کم یکی از اعداد  $a^b$  یا  $b^a$  عضو  $S$  باشند.  
الف. یک مجموعه توانای چهار عضوی مثال بزنید.  
ب. ثابت کنید یک مجموعه توانای متناهی؛ بیش از چهار عضو ندارد.

راه حل.

الف.  $\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}\}$  یک مجموعه توانای ۴ عضوی است:

$$1^x = 1, \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}, \quad \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}.$$

(البته این مثال را می توان با تحلیل صورت کلی مجموعه های توانا - همان طور که در ادامه خواهد آمد - به دست آورد.)

ب. ابتدا چند خاصیت اساسی عمل به توان رساندن را یادآوری می کنیم:

- برای هر عدد مثبت  $x$  و اعداد مثبت  $a < b$ ،  $a^x < b^x$ .
- اگر عدد حقیقی  $a$  بیشتر از ۱ باشد، مقدار  $a^x$  با افزایش  $x$  زیاد می شود؛ به عبارت دیگر، اگر  $x < y$ ،  $a^x < a^y$ .
- اگر عدد حقیقی مثبت  $a$  کمتر از ۱ باشد، مقدار  $a^x$  با افزایش  $x$  کم می شود.

حال به سراغ حل مسأله می رویم. ابتدا یک لم:

لم. یک مجموعه توانای متناهی نمی تواند هم زمان شامل یک عضو بزرگتر از ۱ و یک عضو کمتر از ۱ باشد.

اثبات. فرض کنید چنین نباشد. در این صورت مجموعه توانای متناهی  $S$  وجود دارد که هم شامل عضوی بزرگتر از ۱ و هم شامل عضوی کوچکتر از ۱ است. کوچکترین عضو مجموعه  $S$  را با  $a$  و کوچکترین عضو در میان اعضای بزرگتر از ۱ را با  $b$  نمایش می دهیم. (بنابر متناهی بودن  $S$  چنین اعضایی وجود دارند.) در نتیجه  $a < 1 < b$  داریم. اما  $a^b < a^1 = a$ ، اما  $a$  کوچکترین عضو  $S$  است، پس  $a^b$  نمی تواند در  $S$  باشد. همین طور  $a = b^0 < b^a < b^1 = b$ ، اما  $S$  شامل عضوی بین ۱ و  $b$  نیست، پس  $b^a$  هم نمی تواند در  $S$  باشد. پس هیچ یک از دو عدد  $a^b$  و  $b^a$  در  $S$  قرار ندارند و این توانا بودن  $S$  را نقض و لم را ثابت می کند.  $\square$

با توجه به لم، مجموعه های توانای متناهی، دو نوع هستند. نوع اول آن هایی هستند که همه اعضای آنها بیشتر یا مساوی ۱ هستند و نوع دوم آن هایی هستند که همه اعضای آنها کمتر یا مساوی ۱ هستند.

فرض کنیم  $S$  مجموعه توانایی از نوع اول و با بیش از ۳ عضو باشد. همچنین  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  اعضای بزرگتر از ۱ در  $S$  باشند. از آنجایی که  $S$  عضو کمتر از ۱ ندارد، تعداد اعضای آن حداکثر یکی از  $n$  بیشتر است و در نتیجه  $n \geq 3$ . برای هر  $1 \leq i < n$ ،  $a_n^{a_i}$  از  $a_n$  بیشتر است، پس در  $S$  قرار نمی‌گیرد. پس توانا بودن  $S$  ایجاب می‌کند که  $a_i^{a_n}$  در  $S$  باشد. حال

$$a_1 < a_1^{a_n} < a_2^{a_n} < \dots < a_{n-1}^{a_n}$$

$n$  عضو بزرگتر از ۱ در  $S$  هستند، از طرف دیگر  $a_1 < \dots < a_n$  همه اعضای بزرگتر از ۱ در  $S$  بودند، پس

$$a_2 = a_1^{a_n}, a_3 = a_2^{a_n}, \dots, a_n = a_{n-1}^{a_n}.$$

حال بیا باید توانا بودن  $S$  را در مورد  $a_1$  و  $a_{n-1}$  بررسی کنیم. (با توجه به  $n \geq 3$ ،  $1 < n-1$ ) با توجه به  $a_1 > 1$  داریم:

$$a_1 = a_1^1 < a_1^{a_{n-1}} < a_1^{a_n} = a_2.$$

پس  $a_1^{a_{n-1}}$  عددی بین  $a_1$  و  $a_2$  است و چنین عددی در  $S$  وجود ندارد. به طریق مشابه:

$$a_{n-1} < a_{n-1}^{a_1} < a_{n-1}^{a_n} = a_n.$$

پس  $a_{n-1}^{a_1}$  هم در  $S$  قرار ندارد. پس  $S$  نمی‌تواند توانا باشد و نتیجه می‌گیریم که مجموعه‌های توانای نوع اول حداکثر ۳ عضو دارند.

حال فرض کنید  $S$  یک مجموعه توانای متناهی از نوع دوم با بیش از ۴ عضو و  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  اعضای کمتر از ۱ در آن باشند. پس  $n$  حداقل ۴ است.  $a_n < 1$  پس برای هر  $1 \leq i < n$ ،  $1 = a_n^{a_i} > a_n^{a_i} > a_n^1 = a_n$ . پس  $a_n^{a_i}$  در  $S$  قرار ندارد و  $a_i^{a_n}$  عضو  $S$  است. داریم:

$$a_1 = a_1^1 < a_1^{a_n} < a_2^{a_n} < \dots < a_{n-1}^{a_n} < 1.$$

و در نتیجه مشابه استدلال حالت قبل داریم

$$a_2 = a_1^{a_n}, a_3 = a_2^{a_n}, \dots, a_n = a_{n-1}^{a_n}.$$

و یا معادلاً

$$a_{n-1} = a_n^{\frac{1}{a_n}}, a_{n-2} = a_n^{\frac{1}{a_{n-1}}}, \dots, a_1 = a_n^{\frac{1}{a_2}}.$$

پس اگر  $a_n$  را با  $a$  نشان دهیم، اعضای  $S$ ، به صورت زیر هستند:

$$\dots < a^{\frac{1}{a^{\frac{1}{a}}}} < a^{\frac{1}{a}} < a.$$

حال توجه کنید که  $a_{n-1} < 1$  پس

$$a_n = a_{n-1}^{a_n} < a_{n-1}^{a_{n-2}} < 1.$$

سوالات و راه‌حل‌های مرحله دوم سی و دومین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۹۳

پس  $a_{n-2}^{a_{n-1}}$  در  $S$  قرار دارد و چون

$$a_{n-2}^{a_{n-1}} > a_{n-2}^{a_n} = a_{n-1}$$

پس داریم:  $a_{n-2}^{a_{n-1}} = a_n$

$$\begin{aligned} a_{n-2}^{a_{n-1}} &= \left(a^{1/a^2}\right)^{(a^{1/a})} = a \implies a^{a^{(1/a)-2}} = a \\ \implies a^{\frac{1}{a}-2} &= 1 \end{aligned}$$

که با توجه به این که  $a \neq 1$  پس  $\frac{1}{a} - 2 = 0$  و در نتیجه  $a = \frac{1}{2}$ . پس  $a_n = \frac{1}{2}, a_{n-1} = \frac{1}{4}, a_{n-2} = \frac{1}{16}$  حال  $n \geq 4$  پس  $n - 3 \geq 1$  و  $a_{n-3} = a_{n-2}^2 = \frac{1}{64}$  حال شرط توانا بودن را برای  $a_{n-2}$  و  $a_{n-3}$  بررسی می‌کنیم:

$$a_n = \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{4}} < \left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{16}} = a_{n-2}^{a_{n-3}} < 1.$$

همین‌طور

$$\frac{1}{2} < a_{n-2}^{a_{n-3}} = \left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{16}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} < 1.$$

پس هیچ یک از دو عدد  $a_{n-2}^{a_{n-3}}$  و  $a_{n-3}^{a_{n-2}}$  در  $S$  قرار ندارند و شرط توانا بودن نقض می‌شود. پس مجموعه‌های توانای نوع دوم حداکثر ۴ عضو دارند.

پس هر دو نوع مجموعه توانای متناهی حداکثر ۴ عضو دارد.

۶. در انجمن «معمابازان حرفه‌ای» اعضا به تعدادی گروه تقسیم شده‌اند و در پایان هر هفته گروه‌بندی‌ها به شکل خاصی تغییر می‌کند؛ در هر گروه یکی از اعضا به عنوان به‌ترین عضو مشخص می‌شود و همه به‌ترین‌های گروه‌ها از گروه خود جدا شده و تشکیل یک گروه جدید را می‌دهند. اگر گروهی فقط یک عضو داشته باشد همان عضو به گروه جدید می‌رود و گروه قبلی منحل می‌شود. فرض کنید انجمن  $n$  عضو دارد و در ابتدا همه اعضا در یک گروه بوده باشند. ثابت کنید هفته‌ای فرا می‌رسد که از آن به بعد تعداد اعضای تمام گروه‌ها حداکثر  $1 + \sqrt{2n}$  است.

راه حل نخست:

پیش از هر سخنی ابتدا به این نکته واضح و کلیدی دقت کنید که اگر  $k$  گروه با اعضای  $k, 2, \dots, 1$  داشته باشیم، در مرحله بعد هم  $k$  گروه با اعضای  $k, 2, \dots, 1$  خواهیم داشت. حال به حل سوال توجه کنید.

لم: اگر  $n = \binom{k}{2}$  همواره پس از  $\binom{k}{2}$  حرکت، در نهایت  $k-1$  گروه خواهیم داشت که به ازای هر  $i$  که  $1 \leq i < k$  گروهی با  $i$  عضو موجود باشد.

اثبات لم: برای  $k=2$  بدیهی است و برای  $k=3$  نیز داریم  $n = \binom{3}{2} = 3$  که پس از یک حرکت به حالت یک گروه یک نفره و یک گروه دو نفره می‌رسیم.

فرض می‌کنیم حکم استقرا به ازای هر  $1 \leq k \leq m$  برقرار باشد، حال حکم را برای  $k = m+1$  اثبات می‌کنیم. بنابراین فرض کنید گروه اصلی گروهی با  $\binom{m+1}{2}$  عضو باشد. طبق فرض استقرا پس از  $\binom{m}{2}$  حرکت،  $m-1$  گروه جدید خواهیم داشت که به ازای هر  $i$  که  $1 \leq i \leq m-1$  گروهی با  $i$  عضو موجود باشد. ضمناً تعداد اعضای گروه اصلی هم برابر با  $m = \binom{m}{2} - \binom{m+1}{2}$  است. بنابراین حکم با استقرا اثبات شد.

حال به اثبات باقیمانده سوالات می‌رویم: فرض کنید  $n = \binom{k}{2} + t$  به طوری که  $n \leq \binom{k+1}{2}$  می‌خواهیم اثبات کنیم مرحله‌ای وجود دارد که از آن به بعد تعداد اعضای بزرگترین گروه  $n$  نفر است. برای این کار هم به سادگی مانند اثبات لم بالا فرض کنید  $\binom{k+1}{2}$  معماباز داریم که  $t = \binom{k}{2} - \binom{k+1}{2}$  تا از آنها عضو فرعی و بقیه اصلی هستند. (در واقع تعدادی عضو فرعی اضافه نمودیم.) در هر مرحله هم اولویت برداشت عضو از هر گروه با اعضای اصلی آن گروه می‌باشد (اعضای فرعی تا جای ممکن از همه می‌بازند!). طبق لم می‌دانیم مرحله‌ای وجود دارد که از آن به بعد به ازای هر  $1 \leq i \leq k$ ، گروهی با  $i$  عضو وجود دارد. در هر مرحله تعداد اعضای هر گروه از  $k$  بیشتر نمی‌شود و بدون در نظر گرفتن اعضای فرعی هم این حکم درست است. بنابراین تعداد اعضای اصلی از  $k$  بیشتر نمی‌شود. پس حکم به این صورت نتیجه می‌شود:

$$\frac{k^2 - k}{2} = \binom{k}{2} < n = \binom{k}{2} + t \leq \binom{k+1}{2}$$

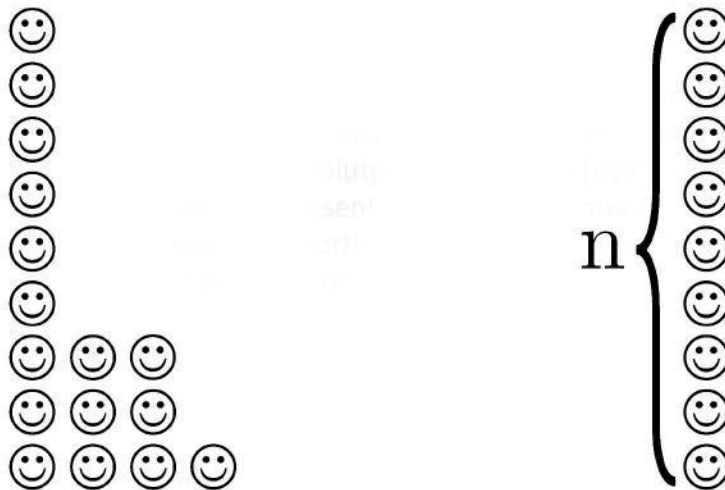
$$\Rightarrow k^2 - k + \frac{1}{2} < 2n \Rightarrow (k - \frac{1}{2})^2 < 2n \Rightarrow k < \sqrt{2n} + \frac{1}{2} < \sqrt{2n} + 1$$

راه حل دوم:

توجه کنید که سوال معادل این است که ثابت کنیم اگر در ابتدا یک دسته  $n$  تایی از دایره داشته باشیم و در هر مرحله از هر دسته یک دایره انتخاب کرده و با آنها دسته‌ای جدید ایجاد کنیم، مرحله‌ای فرا خواهد رسید که از آن مرحله به بعد، هر دسته شامل حداکثر  $\sqrt{2n} + 1$  دایره باشد.

برای این که راه حل قابل فهم‌تر باشد تعدادی تعریف کرده و شهودی کلی از اثبات ارائه می‌دهیم و در انتها شهودی که ارائه دادیم را دقیق می‌کنیم.

تعریف ۱: برای هر دسته‌بندی از دایره، «قیافه» این دسته‌بندی را نمایشی از دایره‌ها گوییم به طوری که هر دسته به شکل ستونی از دایره باشد و ستون‌ها نیز بر حسب تعداد دایره‌شان مرتب شده باشند. در شکل زیر قیافه دسته‌بندی  $(n)$  را در سمت راست و قیافه دسته‌بندی  $(1, 3, 9, 3)$  را در سمت چپ می‌بینید.



تعریف ۲: یک «پلکان به طول  $k$ » شامل  $\binom{k+1}{2}$  دایره است به طوری که دایره‌ها در دسته‌های  $1, 2, 3, 4, \dots, k$  تایی قرار داشته باشند.

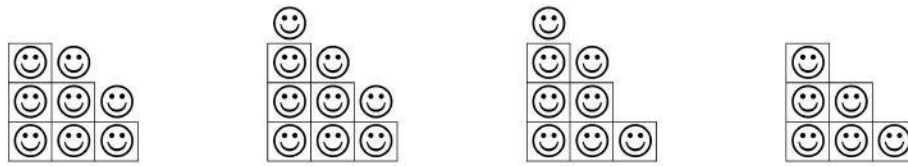
تعریف ۳: یک «پلکان به طول  $k$  و تاج  $t$ » (که  $t \leq k$ ) پلکانی به طول  $k$  است که به دسته بزرگ‌تر آن یک دایره اضافه کرده‌ایم. در نتیجه شامل  $\binom{k+1}{2} + t$  دایره است که در دسته‌های  $1, 2, \dots, k-t, k-t+2, \dots, k, k+1$  تایی قرار گرفته‌اند. اگر  $t = k+1$  پلکان به طول  $k$  و تاج  $t$  را همان پلکان به طول  $k+1$  در نظر می‌گیریم. پس پلکان به طول  $k$  و تاج  $t$  یک پلکان به طول  $k$  است.

تعریف ۴: یک «ساختار پلکانی با  $m$  دایره» دسته‌بندی شامل  $m$  دایره است که اگر  $\binom{k+2}{2} \leq m < \binom{k+1}{2}$  این دسته‌بندی به شکل پلکانی به طول  $k$  و تاج  $m - \binom{k+1}{2}$  باشد.

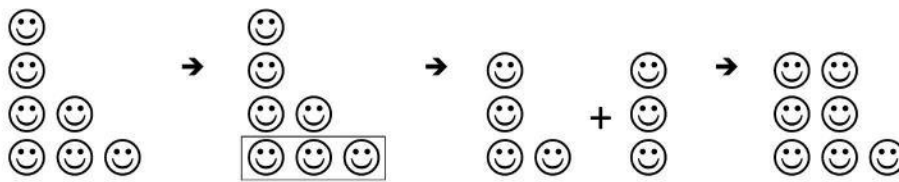
تعریف ۵: یک «پلکان به طول  $k$  و تاج  $t$  و جایگاه  $r$ » (که  $t \leq k+1$ ) پلکانی با دسته‌های  $x_0, x_1, \dots, x_k$  است ( $x_i$  می‌تواند ۰ باشد) که اگر  $k-i$  به پیمانه  $k+1$  عضو مجموعه  $\{r, r+1, \dots, r+t-1\}$  باشد  $x_i = i+1$  و در غیر این صورت  $x_i = i$  پس پلکان به طول  $k$  و تاج  $t$  و جایگاه  $r$  یک پلکان به طول  $k$  و تاج  $t$  است.

شکل زیر از راست به چپ قیافه یک پلکان به طول ۳، قیافه یک پلکان به طول ۳ و تاج ۲، قیافه یک ساختار پلکانی به طول ۹ و قیافه یک پلکان به طول ۳ و تاج ۲ و جایگاه ۵ را نشان می‌دهد.

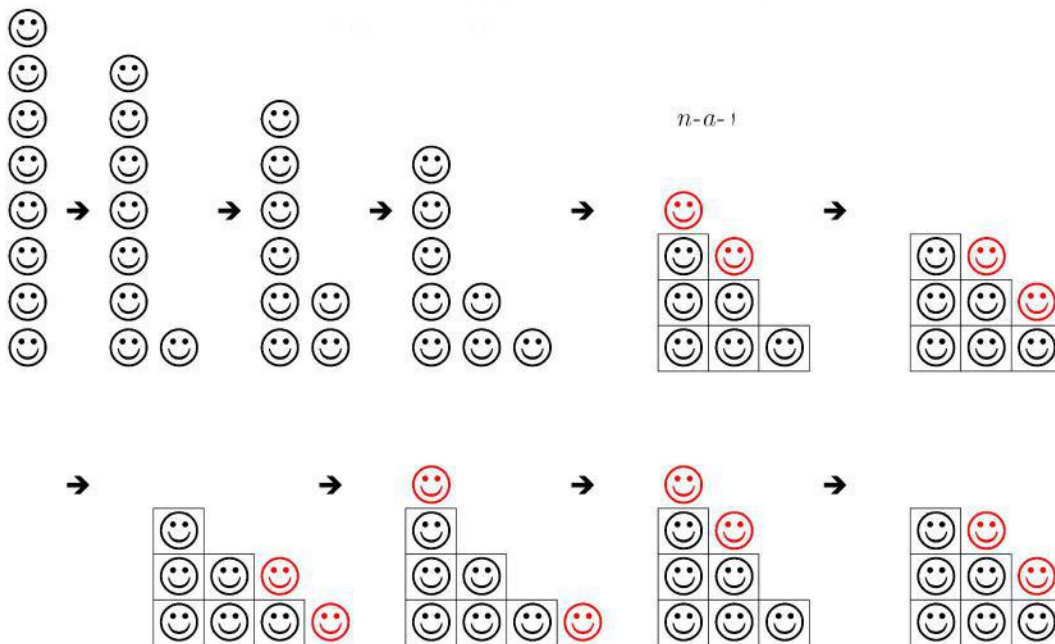
# آکادمی آموزشی تیزلاین <



نکته ۱: چنانچه یک دسته‌بندی داشته باشیم، در هر مرحله قیافه دسته‌بندی به این شکل تغییر می‌کند: سطر پایینی جدا شده و به یک ستون جدید تبدیل می‌شود. سپس این ستون بر حسب تعداد دایره‌ها در جایگاه مناسب قرار می‌گیرد. برای مثال قیافه دسته (۲, ۱, ۴) به این شکل تغییر می‌کند:



اکنون فرض کنید  $(a+2) > n \geq (a+1)$  و  $b = n - (a+1)$  در ادامه راه می‌خواهیم اثبات کنیم دایره‌ها از مرحله  $n - a - 1$  به بعد مانند شکل جمع شده و قیافه‌ها با الگوی خاصی تکرار می‌شوند.



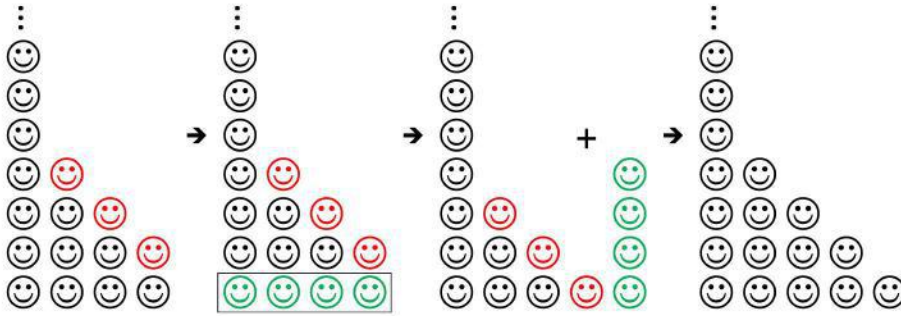
حال به اثبات دقیق می‌پردازیم.

ادعا ۱: در مرحله  $l$ ام ( $l < n$ )، دسته‌بندی شامل یک ساختار پلکانی با  $l$  دایره به همراه یک دسته با  $n - l$  دایره است.

اثبات ادعا: به استقرا روی  $l$  حکم را ثابت می‌کنیم. پایه استقرا با توجه به اولین عمل واضح است. برای اثبات گام استقرا توجه می‌کنیم که طبق فرض استقرا در مرحله  $l - 1$ ام، دسته‌بندی شامل یک ساختار پلکانی با  $l - 1$  دایره به همراه یک دسته با  $n - l + 1$  دایره است. حال دو حالت داریم:



حالت نخست:  $k$  وجود داشته باشد که  $l - 1 = \binom{k+1}{2} - 1$ . در این حالت پلکانی به طول  $k - 1$  و تاج  $k - 1$  داریم پس دسته‌ها به طول  $1, 2, 3, \dots, k - 1, k, n - l + 1$  هستند. که در مرحله بعد طول دسته‌ها برابر  $1, 2, 3, \dots, k - 2, k - 1, k, n - l$  خواهد شد. که این یک پلکان به طول  $k + 1$  به همراه یک ستون با  $n - l$  دایره است. پس در این حالت مرحله بعد حاوی یک ستون با  $n - l < 0$  دایره و یک ساختار پلکانی اتایی است.



حالت دوم:  $\binom{k}{2} \leq k - l < \binom{k+1}{2} - 1$ . در این حالت ساختار پلکانی به شکل یک پلکان به طول  $k - 1$  و تاج به طول نامنظمی و کمتر از  $k - 1$  است. پس در این حالت پلکان شامل دسته‌ای به طول  $1$  است. پس طول دسته‌ها به شکل  $1, \dots, k - t - 1, k - t + 1, \dots, n - l + 1$  است (طول بزرگترین دسته ساختار  $k$  یا  $k - 1$  است). حال با حذف یک دایره از هر دسته و ایجاد دسته‌های جدید دسته‌ای به طول  $k$  ایجاد می‌شود و دسته‌های موجود به شکل  $1, \dots, k - t - 2, k - t, \dots, k$  خواهند بود (طول کوچکترین دسته ساختار  $1$  یا  $2$  خواهد بود). که این یک ساختار پلکانی با  $l$  دایره به همراه یک ستون با  $n - l < 0$  دایره است.



پس در هر دو حالت حکم استقرا را نتیجه گرفتیم و این موجب اثبات ادعا می‌شود. حال می‌دانیم که ادعای  $1$  برای هر  $n < l$  درست است. پس این حکم برای  $l = n - a - 1$  نیز درست است. پس در مرحله  $n - a - 1$  یک ساختار پلکانی به طول  $n - a - 1$  و یک ستون به طول  $a + 1$  داریم. از آنجایی که  $\binom{a+1}{2} < n \leq \binom{a+2}{2}$  پس  $\binom{a+1}{2} \leq n - a - 1 \leq \binom{a+1}{2}$  که این نشان می‌دهد که ساختار پلکانی، پلکانی به طول  $a - 1$  و تاج به طول مثبت (شاید  $a$ ) دارد. پس با اضافه کردن دسته به طول  $a + 1$  پلکانی به طول  $a$  به همراه تاج به طول مثبت (شاید  $a + 1$ ) خواهیم داشت. ادعا می‌کنیم که پس از این، طول هیچ دسته‌ای از  $a + 1$  بیشتر نمی‌شود. برای اثبات کل دایره‌های موجود را آبی کرده و تعدادی دایره قرمز روی پلکان اضافه می‌کنیم تا یک پلکان به طول  $a + 1$  ایجاد کنند. با توجه به نکته  $1$ ، پلکان به طول  $a + 1$  پس از هر مرحله به خودش

تبدیل می‌شود. پس در قیافه شامل دایره‌های قرمز و آبی، طول دسته‌ها هیچ‌گاه بیشتر از  $a + 1$  نمی‌شود. حال اگر در هر مرحله دایره‌های قرمز را در بالای هر دسته قرار دهیم نتیجه می‌شود که دایره‌های قرمز هیچ تأثیری در ساختار دایره‌های آبی ندارند و در نتیجه تعداد دایره‌های آبی در دسته‌هایشان همواره کمتر مساوی  $a + 1$  است.



حال توجه کنید که

$$(a+1) < n \Rightarrow (a+1)^2 - (a+1) < 2n \Rightarrow (a+1)^2 - (a+1) + \frac{1}{4} < 2n \Rightarrow ((a+1) - \frac{1}{4})^2 < 2n \Rightarrow (a+1) - \frac{1}{4} < \sqrt{2n} \Rightarrow a+1 < \sqrt{2n} + 1$$

پس تعداد دایره‌های درون هر دسته همواره کمتر از  $\sqrt{2n} + 1$  است.

اکنون می‌خواهیم کمی فراتر از راه‌حل سوال رفته و ساختار دسته‌بندی‌ها را پس از مرحله  $n - a + 1$  نیز به دست بیاوریم. توجه کنید که در این مرحله دسته‌بندی‌ها یک پلکان به طول  $a$  و تاج  $b$  و جایگاه  $\circ$  تشکیل داده‌اند. ادعا ۲: در مرحله  $a - n + 1 + r$  پلکانی به طول  $a$  و تاج  $b$  و جایگاه  $r$  خواهیم داشت.

اثبات ادعا: برای اثبات ادعا روی  $r$  استقرا می‌زنیم. پایه همان نتیجه ادعای ۱ است. برای تکمیل گام استقرا فرض را برای  $r - 1$  در نظر گرفته و دو حالت را در نظر می‌گیریم.

حالت نخست:  $a$  به پیمانه  $a + 1$  عضو مجموعه  $\{r - 1, r - 2, \dots, r + t - 2\}$  نباشد. در این حالت یک پلکان به طول  $a$  داریم و با توجه به فرض این حالت، مجموعه  $x$  در تعریف پلکان به طول  $a$  و تاج  $b$  و جایگاه  $r$  دارای صفر دایره است. پس قیافه این دسته‌بندی دارای  $a$  دایره پایینی است و با جدا نمودن این دایره‌ها و ایجاد دسته جدید دسته  $x_a$  دارای  $a$  دایره خواهد بود. همچنین با توجه به این که دسته  $x_i$  به جای دسته  $x_{i-1}$  قرار گرفته است می‌توانیم ادعا کنیم که در دسته‌بندی جدید اگر  $a - j$  به پیمانه  $a + 1$  عضو مجموعه  $\{r, r + 1, \dots, r + t - 1\}$  باشد  $x_j = j + 1$  و در غیر این صورت  $x_j = j$  پس در مرحله بعدی پلکان به طول  $a$  و تاج  $b$  و جایگاه  $r$  خواهیم داشت.

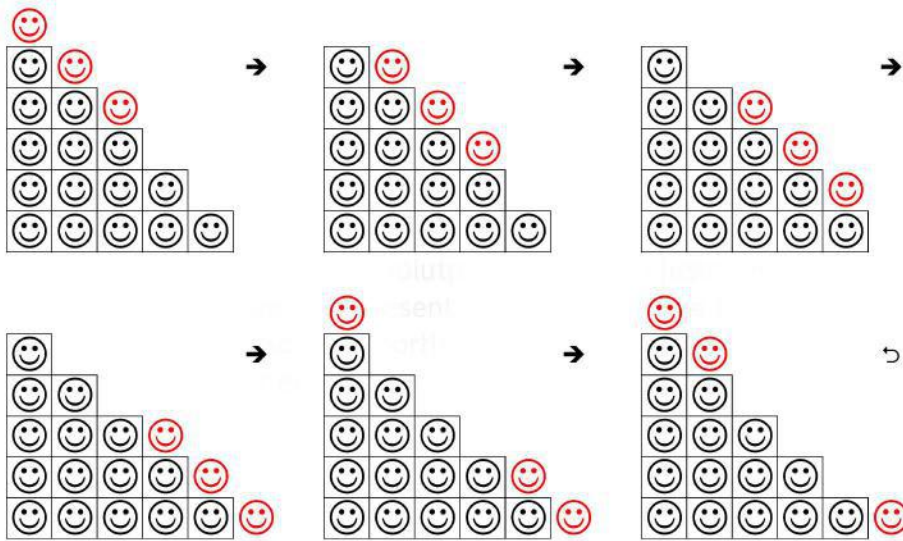
حالت دوم:  $a$  به پیمانه  $a + 1$  عضو مجموعه  $\{r - 1, r - 2, \dots, r + t - 2\}$  باشد. در این حالت یک پلکان به طول  $a$  داریم و با توجه به فرض این حالت، مجموعه  $x$  در تعریف پلکان به طول  $a$  و تاج  $b$  و جایگاه  $r$  دارای ۱ دایره است. پس قیافه این دسته‌بندی دارای  $a + 1$  دایره پایینی است و با جدا نمودن این دایره‌ها و ایجاد دسته جدید دسته  $x_a$  دارای  $a + 1$  دایره خواهد بود. همچنین با توجه به این که دسته  $x_i$  به جای دسته  $x_{i-1}$  قرار گرفته است می‌توانیم ادعا کنیم که در دسته‌بندی جدید اگر  $a - j$  به پیمانه  $a + 1$  عضو مجموعه  $\{r, r + 1, \dots, r + t - 1\}$  باشد  $x_j = j + 1$  و در غیر این صورت  $x_j = j$  پس در مرحله بعدی پلکان به طول

# آکادمی آموزشی تیزلاین <

سوالات و راه حل های مرحله دوم سی و دومین دوره المپیاد ریاضی، ۱۳۹۳

$a$  و تاج  $b$  و جایگاه  $r$  خواهیم داشت.

پس ادعای ۲ نیز ثابت شد. اکنون می توانیم ادعا کنیم که پس از مرحله  $a - n - 1$  دسته بندی ها به نظم واضحی هر  $a + 1$  مرحله تکرار می شوند و چون پیش از مرحله  $n - a - 1$  دسته ای به طول  $a + 2$  داشتیم، پس مرحله  $n - a - 1$  اولین مرحله ایست که این تناوب شروع می شود. پس قیافه ی دسته بندی ها پس از مرحله  $n - a - 1$  مانند شکل زیر خواهد بود:



دوره سالانه

نخفیف ویژه  
برای تیزلاینی ها

# آکادمی تیزلاین

## برگزاری می کند:



دکتر میثم کوهگرد

کلاس آنلاین المپیاد  
فیزیک (سطح یک)

پنجشنبه‌ها ۱۵:۱۸ تا ۱۹:۳۰

شروع از ۲۷ آبان

۵ جلسه  
۶۰۰ هزار تومان



دکتر افشین بهرام

کلاس آنلاین المپیاد  
ریاضی (سطح یک)

یکشنبه‌ها ۲۰:۱۵ تا ۲۱:۱۵

شروع از ۲۳ آبان

۵ جلسه  
۶۰۰ هزار تومان



دکتر رضا رحمت‌الزاده

کلاس آنلاین المپیاد  
شیمی (سطح یک)

شنبه‌ها ۲۰:۱۵ تا ۲۱:۱۵

شروع از ۲۲ آبان

۵ جلسه  
۶۰۰ هزار تومان



دکتر قربانی

کلاس آنلاین المپیاد  
زیست‌شناسی (سطح دو)

سه‌شنبه‌ها ۲۰:۱۵ تا ۲۱:۱۵

شروع از ۲۵ آبان

۲۰ جلسه  
۸۰۰ هزار تومان



دکتر میثم کوهگرد

کلاس آنلاین المپیاد  
فیزیک (سطح دو)

پنجشنبه‌ها ۲۰:۱۵ تا ۲۱:۱۵

شروع از ۲۷ آبان

۲۰ جلسه  
۸۰۰ هزار تومان



دکتر قربانی

کلاس آنلاین المپیاد  
زیست‌شناسی (سطح یک)

سه‌شنبه‌ها ۱۵:۱۸ تا ۱۹:۳۰

شروع از ۲۵ آبان

۵ جلسه  
۶۰۰ هزار تومان

#تیزلاینی\_شو



ثبت نام در سایت رسمی



tizline.ir

www.tizline.ir



۰۲۱-۹۱۳۰۲۲۰۲



۰۹۳۳-۳۸۴ ۰۲۰۲

# آکادمی آموزشی تیزلاین <

## تقویم آموزشی آکادمی تیزلاین

سال ۱۴۰۱-۱۴۰۰

#تیزلاینی\_شو

ترم دو  
دوره  
سالانه

آغاز ثبت نام: ۱ دی

شروع دوره: ۱ بهمن

پایان دوره: ۲۵ اردیبهشت

۱۵ جلسه

ترم یک  
دوره  
سالانه

آغاز ثبت نام: ۱ شهریور

شروع دوره: ۱۰ مهر

پایان دوره: ۱۸ دی

۱۵ جلسه

ترم  
تابستان

آغاز ثبت نام: ۱۰ خرداد

شروع دوره: ۱۲ تیر

پایان دوره: ۲۰ شهریور

۱۰ جلسه

آنلاین تخصص ماست

کلاس ، آزمون ، مشاوره ، تکلیف

ثبت نام در سایت رسمی آکادمی تیزلاین [www.Tizline.ir](http://www.Tizline.ir)

آزمون های هماهنگ از ۲۵ مهر تا ۱۱ اردیبهشت

@mathmovie6

Tizline.ir

[www.Tizline.ir](http://www.Tizline.ir)

@tizline

۰۹۳۳ ۳۸۴ ۰۲۰۲

۵۰۰۰۲۶۹۱۳۲۴

۰۲۱ ۴۴۱۳ ۶۹۷۵

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور