



# آکادمی آنلاین تیزلاین قوی ترین پلتفرم آموزشی تیز هوشان

برگزار کننده کلاس های آنلاین و حضوری تیز هوشان ✓

و المپیاد از پایه چهارم تا دوازدهم

آزمون های آنلاین و حضوری ✓

مشاوره تخصصی ✓

با اسکن QR کد روبرو  
وارد صفحه اینستاگرام  
آکادمی تیزلاین شو و از  
محتوای آموزشی  
رایگان لذت ببر



برای ورود به صفحه اصلی سایت آکادمی تیزلاین کلیک کنید

برای دانلود دفترچه آزمون های مختلف برای هر پایه کلیک کنید

برای مطالعه مقالات بروز آکادمی تیزلاین کلیک کنید

به نام او

روز اول

۱. همه  $a$  و  $b$  های طبیعی و نسبت به هم اول را بیابید که

$$\frac{a}{b} = b/a.$$

(توضیح: اگر  $a = 92$  و  $b = 13$ ، آن گاه  $b/a$  برابر سیزده و نود و دو صدم است.)



۲. فرض کنید اعداد طبیعی  $W_1, W_2, \dots, W_n$  و وزن  $n$  وزنه باشند. به این مجموعه از وزنه‌ها «کامل» می‌گوییم اگر برای هر عدد طبیعی  $W$  که کوچک‌تر از  $W_1 + W_2 + \dots + W_n$  است، مجموع وزن تعدادی از این وزنه‌ها برابر  $W$  شود. ثابت کنید اگر از یک مجموعه وزنه کامل، یک وزنه با سنگین‌ترین وزن را حذف کنیم، مجموعه وزنه باقی‌مانده نیز کامل است.

۳. مثلث دل‌خواه  $ABC$  داده شده است. وسط کمان  $BC$  از دایره محیطی مثلث که شامل رأس  $A$  نیست را  $M$  می‌نامیم. از نقطه  $O$ ، مرکز دایره محیطی مثلث، دو خط به موازات  $MB$  و  $MC$  رسم می‌کنیم تا اضلاع  $AB$  و  $AC$  را به ترتیب در نقاط  $K$  و  $L$  قطع کنند. ثابت کنید اگر امتداد ارتفاع نظیر رأس  $A$  در مثلث، با دایره محیطی در نقطه  $N$  تلاقی کند آن گاه  $NK = NL$ .

موفق باشید

به نام او

روز دوم

۴. فرض کنید  $C$  یک دایره و  $P$  نقطه‌ای خارج از آن باشد. دو مماس  $PA$  و  $PB$  را بر دایره رسم و نقطه  $K$  را روی پاره خط  $AB$  انتخاب کرده‌ایم. دایره محیطی مثلث  $PBK$  برای بار دوم دایره  $C$  را در نقطه  $T$  قطع می‌کند. قرینه  $P$  نسبت به  $A$  را  $P'$  می‌نامیم. نشان دهید  $\angle PBT = \angle P'KA$ .

۵. در خانه‌های یک جدول  $n \times m$  اعداد صحیح نوشته شده است. منظور از یک ردیف اریب، خانه‌هایی از جدول است که تفاضل شماره ستون و شماره سطر آن‌ها برابر مقداری ثابت است. می‌خواهیم طی چند مرحله اعداد داخل جدول را صفر کنیم. در هر مرحله می‌توانیم خانه‌های یک ردیف افقی یا یک ردیف عمودی و یا یک ردیف اریب را انتخاب و از همه یک واحد کم کنیم یا به همه یک واحد اضافه کنیم. ثابت کنید اگر بتوان اعداد داخل هر زیرجدول  $3 \times 3$  را، صرف نظر از خانه‌های دیگر، صفر کرد آن‌گاه می‌توان همه اعداد داخل جدول را صفر کرد. به عنوان مثال در جدول  $5 \times 9$  زیر، خانه‌های یکی از ردیف‌های اریب با علامت  $\blacktriangledown$  و خانه‌های یکی از زیرجدول‌های  $3 \times 3$  با علامت  $*$  مشخص شده است. توجه کنید که خانه گوشه راست - بالا (سطر ۱، ستون ۹) نیز به‌تنهایی یک ردیف اریب حساب می‌شود.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱						$\blacktriangledown$			
۲		*	*	*			$\blacktriangledown$		
۳		*	*	*				$\blacktriangledown$	
۴		*	*	*					$\blacktriangledown$
۵									

(راهنمایی: ابتدا به این سؤال فکر کنید که اعداد یک جدول  $3 \times 3$  در چه صورت قابل صفر کردن است.)

۶. دنباله  $\{a_n\}$  از اعداد طبیعی در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$a_{n+2} = \left[ \frac{2a_{n+1}}{a_n} \right] + \left[ \frac{2a_n}{a_{n+1}} \right]$$

که در آن منظور از  $[x]$ ، جزء صحیح عدد  $x$  است. ثابت کنید عدد طبیعی  $m$  وجود دارد که  $a_m = 4$  و  $a_{m+1} \in \{3, 4\}$ .

موفق باشید

به نام او

پاسخ‌های آزمون مرحله دوم ۱۳۹۲

۱. همه  $a$  و  $b$  های طبیعی و نسبت به هم اول را بیابید که  $\frac{a}{b} = b/a$ .

راه حل اول. فرض کنید  $k$  تعداد ارقام  $a$  باشد، یعنی  $(10^{k-1} \leq a < 10^k)$ . در این صورت  $b/a = b + \frac{a}{10^k}$  بنابراین با توجه به فرض مسئله خواهیم داشت:

$$\frac{a}{b} = b + \frac{a}{10^k} \Rightarrow 10^k a = 10^k b^2 + ab$$

با توجه به عبارت بالا و توجه به روابط بخش‌پذیری،  $a \mid 10^k b^2$ ،  $a \mid 10^k a$  و  $b \mid 10^k a$  و  $10^k \mid ab$  به دست می‌آیند. از آن‌جا که  $a$  و  $b$  نسبت به هم اول هستند، با به کار بردن لم اقلیدس و استفاده از دو رابطه اول قبلی به دست می‌آید  $10^k \mid b$  و  $10^k \mid a$ . مجدداً چون ب.م.م  $a$  و  $b$  برابر یک است، خواهیم داشت  $10^k \mid ab$ . بنابراین  $10^k = ab$ . حال بار دیگر با توجه به این که  $a$  و  $b$  نسبت به هم اول هستند، عامل مشترکی ندارند و لذا چهار حالت زیر ممکن است:

حالت ۱.  $a = 10^k$  و  $b = 1$

حالت ۲.  $a = 2^k$  و  $b = 5^k$

حالت ۳.  $a = 5^k$  و  $b = 2^k$

حالت ۴.  $a = 1$  و  $b = 10^k$

حالت ۱ با  $k$  رقمی بودن  $a$  تناقض دارد. ضمناً از فرض مسئله  $(\frac{a}{b} = b/a)$  به دست می‌آید  $b > \frac{a}{b}$  و لذا  $a > b^2$  و با توجه به این نکته حالت‌های ۲ و ۳ هم امکان ندارند  $(1 < 10^{2k}, 1 < 5^{2k}, 2^k < 5^{2k})$ . پس تنها حالت مورد قبول ۳ است. با توجه به  $k$  رقمی بودن  $a$ ،  $a = 5^k$  و  $10^{k-1} \leq a = 5^k$  و در نتیجه  $2^{k-1} \leq 5$  یعنی  $k$  نمی‌تواند بزرگ‌تر از ۳ باشد  $(2^{k-1} \leq 5 < 8 = 2^3 \Rightarrow k \leq 3)$ .

$k = 1$  • در این صورت  $a = 5$  و  $b = 2$  که به وضوح  $\frac{5}{2} = 2/5$  و این جوابی از مسئله است.

$k = 2$  • در این صورت  $a = 25$  و  $b = 4$  که امکان ندارد زیرا  $4/25 > 6 > \frac{25}{4}$ .

$k = 3$  • در این صورت  $a = 125$  و  $b = 8$  که این هم ممکن نیست چون  $8/125 > 10 > \frac{125}{8}$ .

بنابراین تنها جواب مسئله  $a = 5$  و  $b = 2$  است.

راه حل دوم. فرض کنید  $k$  تعداد ارقام  $a$  باشد. پس خواهیم داشت  $\frac{a}{b} = b/a = b + \frac{a}{10^k}$  و این معادل با این است که  $\frac{a-b^2}{b} = \frac{a}{10^k}$ . چون  $(a, b) = 1$ ، پس  $(a - b^2, b) = 1$  یعنی کسری  $\frac{a-b^2}{b}$  کسری تحویل‌ناپذیر و مساوی با (ساده شده)  $\frac{a}{10^k}$  است. بنابراین  $s \in \mathbb{N}$  وجود دارد که  $s(a - b^2) = a$  و  $sb = 10^k$ . پس خواهیم داشت  $a - b^2 \mid a$  و چون  $(a - b^2, a) = 1$ ،  $a - b^2 \mid 1$  و لذا  $a - b^2 = \pm 1$ . اما از آن‌جا که  $\frac{a-b^2}{b} = \frac{a}{10^k} > 0$  تنها حالت  $+1$  قابل قبول است. یعنی  $a = b^2 + 1$  و  $a = \frac{a}{10^k} = \frac{1}{b}$ . حال توجه کنید که چون  $k$  تعداد ارقام  $a$  است، پس  $a \geq 10^{k-1}$  یا  $\frac{1}{b} = \frac{a}{10^k} \geq \frac{1}{10}$  در نتیجه  $b \leq 10$  از طرفی  $ab = b(b^2 + 1) = 10^k$  توانی از ۱۰ است، پس عوامل اول  $b$ ، ۲ یا ۵ است یعنی  $b \in \{1, 2, 4, 5, 8, 10\}$ . در این صورت  $b^2 + 1 \in \{2, 5, 17, 26, 65, 101\}$  و چون  $b^2 + 1$  هم عامل

اولی جز ۲ و ۵ ندارد تنها حالت  $b = 1$  و  $b = 2$  می ماند. اما اگر  $b = 1$ ،  $b(b^2 + 1) = 2$ ، توانی از ۱۰ نیست. پس تنها حالت  $a = 5$  و  $b = 2$  باقی می ماند که این هم به وضوح جوابی از مسئله است.  $(\frac{a}{b} = \frac{5}{2} = 2/5 = b/a)$ .

۲. فرض کنید اعداد طبیعی  $w_1, w_2, \dots, w_n$  وزن  $n$  وزنه باشند. به این مجموعه از وزنه ها «کامل» می گوئیم اگر برای هر عدد طبیعی  $W$  که کوچک تر از  $w_1 + w_2 + \dots + w_n$  است، مجموع وزن تعدادی از این وزنه ها برابر  $W$  شود. ثابت کنید اگر از یک مجموعه وزنه کامل، یک وزنه با سنگین ترین وزن را حذف کنیم، مجموعه وزنه باقی مانده نیز کامل است.

راه حل. نشان می دهیم مجموعه  $n$  عدد  $w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_n$  کامل است اگر و تنها اگر  $w_1 = 1$  و برای هر  $2 \leq i \leq n$  داشته باشیم  $w_i \leq w_1 + w_2 + \dots + w_{i-1} + 1$ . توجه کنید اگر  $w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_n$  دارای شرط یاد شده باشند اعداد  $w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_{n-1}$  نیز دارای آن شرط هستند پس برای اثبات حکم کفایت ادعای خود را ثابت کنیم.

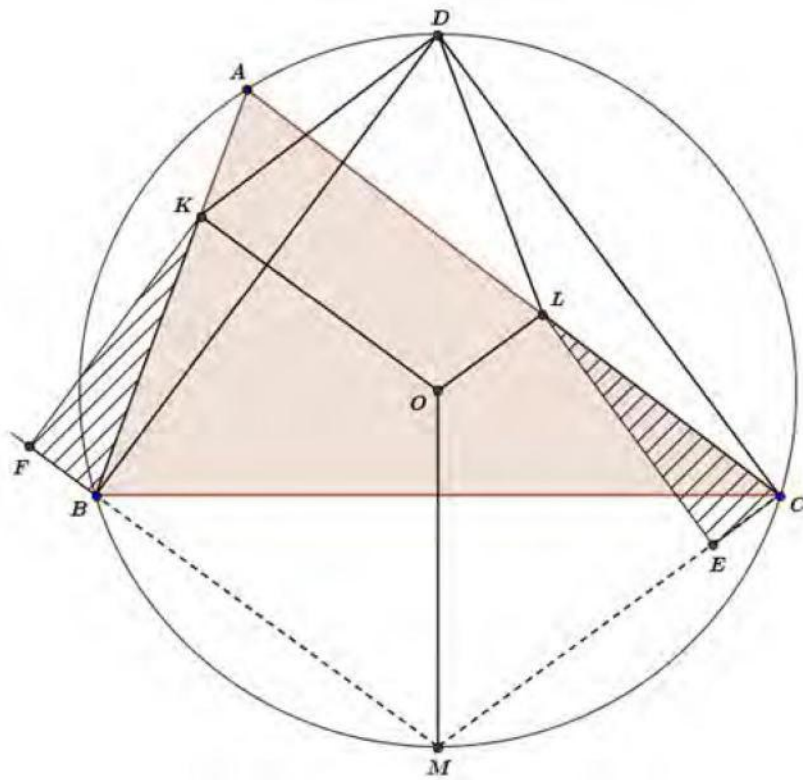
روشن است که اگر  $w_1 > 1$  یا برای یک  $2 \leq i \leq n$  داشته باشیم  $w_i > w_1 + w_2 + \dots + w_{i-1} + 1$  آنگاه به ترتیب عدد ۱ یا عدد  $w_1 + w_2 + \dots + w_{i-1} + 1$  مجموع هیچ تعدادی از وزنه ها نمی شود. پس اگر تعدادی وزنه کامل باشند شرط بالا درباره آن ها صادق است. حال اگر برای تعدادی وزنه شرط یاد شده برقرار باشد به استقرا روی  $n$  نشان می دهیم که کامل هستند. پایه استقرا در حالتی که تنها یک وزنه داریم واضح است. حال حکم را برای  $n = k - 1$  فرض می کنیم. اگر  $w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_k$  دارای شرط یاد شده باشند اعداد  $w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_{k-1}$  نیز دارای آن شرط هستند پس طبق فرض استقرا مجموعه ای کاملند پس هر عدد طبیعی  $W$  که کوچک تر از  $w_1 + w_2 + \dots + w_{k-1}$  باشد به صورت جمع تعدادی از  $w_1, w_2, \dots, w_{k-1}$  است. حال برای آن های طبیعی که  $w_1 + w_2 + \dots + w_{k-1} < W < w_1 + w_2 + \dots + w_k$  چون  $w_k \leq w_1 + w_2 + \dots + w_{k-1} + 1$  داریم:

$$-1 \leq w_1 + w_2 + \dots + w_{k-1} - w_k < W - w_k < w_1 + w_2 + \dots + w_{k-1}$$

در حالت  $W - w_k = 0$  مطلوب حاصل است. در غیر این صورت  $1 \leq W - w_k < w_1 + w_2 + \dots + w_{k-1}$  طبق فرض استقرا  $W - w_k$  به صورت جمع تعدادی از  $w_1, w_2, \dots, w_{k-1}$  است. حال اگر  $w_k$  را به آن مجموعه اضافه کنیم مجموع اعضای مجموعه جدید برابر  $W$  خواهد بود و حکم برای  $n = k$  نیز نتیجه می شود.

۳. مثلث دل خواه  $\triangle ABC$  داده شده است. وسط کمان  $\widehat{BC}$  از دایره محیطی مثلث که شامل رأس  $A$  نیست را  $M$  می نامیم. از نقطه  $O$ ، مرکز دایره محیطی مثلث، دو خط به موازات  $MC$  و  $MB$  رسم می کنیم تا اضلاع  $AB$  و  $AC$  را به ترتیب در نقاط  $K$  و  $L$  قطع کنند. ثابت کنید اگر امتداد ارتفاع نظیر رأس  $A$  در مثلث، با دایره محیطی در نقطه  $N$  تلاقی کند آن گاه  $NK = NL$ .

راه حل اول.



ابتدا ثابت می کنیم  $KB = LC$  است. از نقاط  $K$  و  $L$  عمودهای  $KF$  و  $LE$  را بر خطوط  $MB$  و  $MC$  رسم می کنیم. این دو عمود، برابر فاصله  $O$  تا دو وتر برابر  $MB$  و  $MC$  از دایره محیطی مثلث  $\triangle ABC$  هستند و در نتیجه با هم برابرند. از طرف دیگر داریم:  $\angle KBF = \angle LCE$  (چهارضلعی  $ABMC$  محاطی است.) در نتیجه  $\triangle KBF \cong \triangle LCE$  و  $KB = LC$  است.

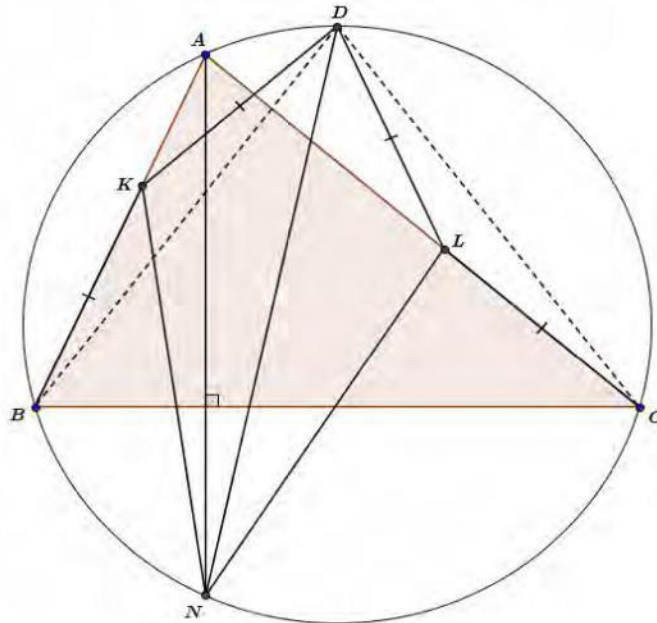
اگر  $D$  نقطه وسط کمان  $\widehat{BAC}$  باشد، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} DB = DC \\ \angle DBA = \angle DCA \\ KB = LC \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle DBK \cong \triangle DCL \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \angle KDL = \angle BDC = \angle BAC \\ KD = LD \end{array} \right.$$

از طرفی  $\angle KOL = \angle BMC$  پس نتیجه می‌شود که  $AKOLD$  محاطی است و داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \angle AKD = \angle ALD = \angle AOD = \hat{B} - \hat{C} \\ \angle KBD = \angle LCD = \frac{\hat{B} - \hat{C}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle KDB = \angle LDC = \frac{\hat{B} - \hat{C}}{2}$$

$$\Rightarrow KB = KD = LD = LC \quad (*)$$

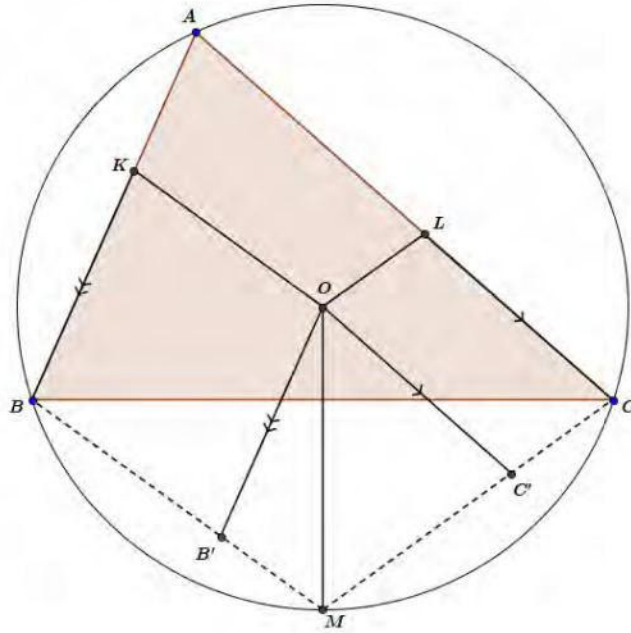


در انتها با اثبات هم‌نهستی دو مثلث  $\triangle NDK$  و  $\triangle NDL$  حکم مساله اثبات خواهد شد.

$$\left. \begin{array}{l} \angle NDK = \angle NDB + \angle BDK = (90^\circ - \hat{B}) + \left(\frac{\hat{B} - \hat{C}}{2}\right) = \frac{\hat{A}}{2} \\ \angle NDL = \angle NDC - \angle CDL = (90^\circ - \hat{C}) - \left(\frac{\hat{B} - \hat{C}}{2}\right) = \frac{\hat{A}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \angle NDK = \angle NDL$$

اکنون با کمک رابطه (\*) هم‌نهستی دو مثلث  $\triangle NDK$  و  $\triangle NDL$  اثبات می‌شود و داریم:  $NK = NL$ .

راه حل دوم.



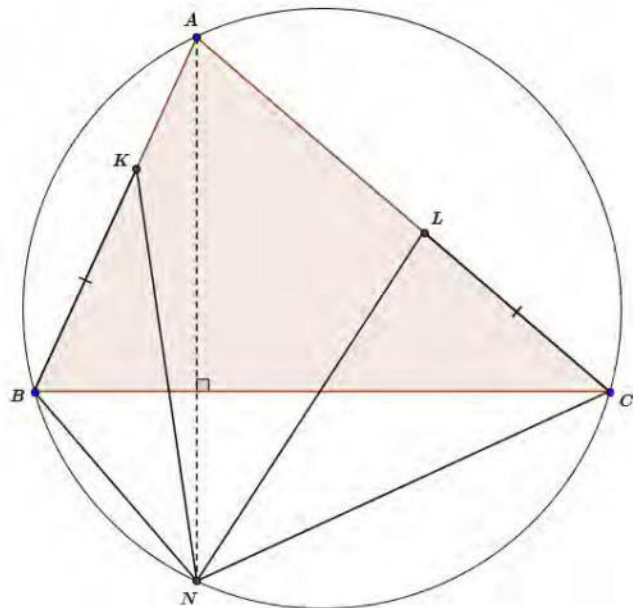
از نقطه  $O$  دو خط به موازات اضلاع  $AB$  و  $AC$  مثلث رسم می‌کنیم تا  $MB$  و  $MC$  را در  $B'$  و  $C'$  قطع کنند. طبق قضیه سینوس‌ها در دو مثلث  $OMB'$  و  $OMC'$  داریم:

$$\left. \begin{aligned} \frac{OB'}{\sin(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2})} &= \frac{R}{\sin(\hat{B}+\frac{\hat{A}}{2})} \\ \sin(\hat{B}+\frac{\hat{A}}{2}) &= \sin(\hat{C}+\frac{\hat{A}}{2}) \\ \frac{OC'}{\sin(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2})} &= \frac{R}{\sin(\hat{C}+\frac{\hat{A}}{2})} \end{aligned} \right\} \Rightarrow OB' = OC' \Rightarrow KB = LC = x \quad (1)$$

طبق رابطه (۱) بدست می‌آید که:

$$\frac{x}{R} = \frac{\sin(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2})}{\sin(\hat{C}+\frac{\hat{A}}{2})} = \frac{\sin(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2})}{\cos(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2})} \quad (2)$$





اکنون طول دو پاره خط  $NK$  و  $NL$  را با استفاده از قضیه کسینوس ها در دو مثلث  $\triangle BKN$  و  $\triangle CLN$  بدست آورده و با یکدیگر مقایسه می کنیم.

$$\begin{cases} NK^2 = NB^2 + BK^2 - 2NB \cdot BK \cdot \cos(90^\circ - \hat{C} + \hat{B}) \\ NL^2 = NC^2 + CL^2 - 2NC \cdot CL \cdot \cos(90^\circ - \hat{B} + \hat{C}) \end{cases}$$

حال چون  $BK = CL = x$  داریم:

$$NK = NL$$

$$\Leftrightarrow NB^2 - 2NB \cdot x \cdot \cos(90^\circ - \hat{C} + \hat{B}) = NC^2 - 2NC \cdot x \cdot \cos(90^\circ - \hat{B} + \hat{C})$$

$$\Leftrightarrow NB^2 - 2NB \cdot x \cdot \sin(\hat{C} - \hat{B}) = NC^2 - 2NC \cdot x \cdot \sin(\hat{B} - \hat{C}) \quad (3)$$

از قضیه سینوس ها داریم:

$$NB = 2R \cdot \sin(90^\circ - \hat{B}) = 2R \cdot \cos \hat{B} \quad , \quad NC = 2R \cdot \sin(90^\circ - \hat{C}) = 2R \cdot \cos \hat{C}$$

حال رابطه (3) را می توان به صورت ساده تری نوشت:

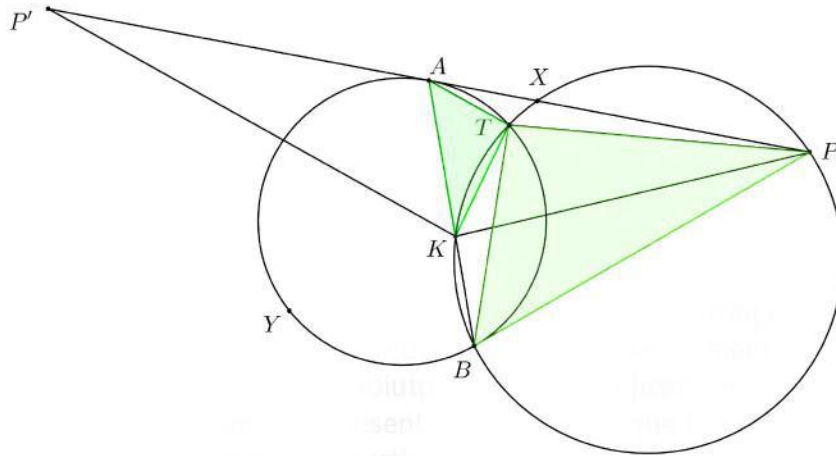
$$4R^2 \cdot \cos^2 \hat{B} + 4R \cdot x \cdot \cos \hat{B} \cdot \sin(\hat{B} - \hat{C}) = 4R^2 \cdot \cos^2 \hat{C} - 4R \cdot x \cdot \cos \hat{C} \cdot \sin(\hat{B} - \hat{C})$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \sin(\hat{B} - \hat{C}) \cdot [\cos \hat{B} + \cos \hat{C}] = R \cdot [\cos \hat{C} - \cos \hat{B}] \cdot [\cos \hat{B} + \cos \hat{C}]$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{R} = \frac{\cos \hat{C} - \cos \hat{B}}{\sin(\hat{B} - \hat{C})} = \frac{2 \sin(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}) \sin(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2})}{2 \sin(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}) \cos(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2})} = \frac{\sin(\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2})}{\cos(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2})}$$

این تساوی، همان رابطه (2) می باشد و از آنجا که این مراحل بازگشت پذیرند خواهیم داشت:  $NK = NL$ .

۴. فرض کنید  $C$  یک دایره و  $P$  نقطه‌ای خارج از آن باشد. دو مماس  $PA$  و  $PB$  را بر دایره رسم و نقطه  $K$  را روی پاره خط  $AB$  انتخاب کرده‌ایم. دایره محیطی مثلث  $PBK$  برای بار دوم دایره  $C$  را در نقطه  $T$  قطع می‌کند. قرینه  $P$  نسبت به  $A$  را  $P'$  می‌نامیم. نشان دهید  $\angle PBT = \angle P'KA$ .  
راه حل اول. در این راه حل همه کمان‌ها متعلق به دایره  $C$  هستند.

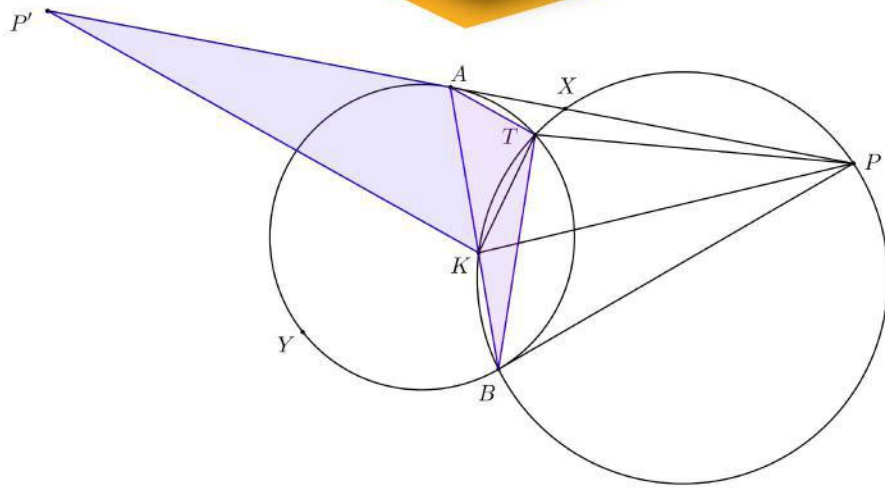


چهارضلعی  $KTPB$  محاطی است بنابراین  $\angle AKT = \angle BPT$ :

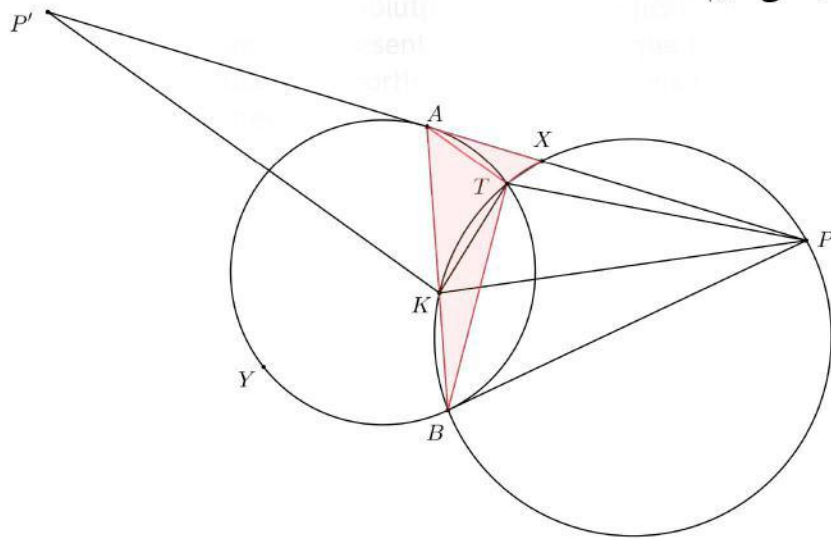
$$\left. \begin{array}{l} \angle TAK = \widehat{TB} = \angle TBP \\ \angle AKT = \angle BPT \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle TAK \sim \triangle TBP \Rightarrow \frac{TA}{TB} = \frac{AK}{BP} = \frac{AK}{AP'} \Rightarrow \frac{AP'}{TB} = \frac{AK}{TA} \quad (1)$$

از طرفی داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \angle P'AK = \widehat{AYB} = \angle BTA \\ (1) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle P'AK \sim \triangle BTA \Rightarrow \angle P'KA = \angle BAT = \angle PBT.$$



راه حل دوم. در این راه حل تنها رابطه (۱) را از راه دیگری ثابت می‌کنیم. قوت نقطه A را نسبت به دایره محیطی مثلث  $PBK$  محاسبه می‌کنیم:



$$AX \cdot AP = AK \cdot AB \Rightarrow \frac{AB}{AX} = \frac{AP}{AK} = \frac{AP'}{AK} \quad (1)$$

از طرفی چهارضلعی  $TKBP$  محاطی است:

$$\left. \begin{array}{l} \angle TBP = \angle TXA \\ \angle TAX = \widehat{\frac{AT}{Y}} = \angle TBA \\ \angle TAB = \widehat{\frac{TB}{Y}} = \angle TBP \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle TAB \sim \triangle TXA \Rightarrow \frac{AB}{XA} = \frac{TB}{TA} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \frac{AP'}{AK} = \frac{TB}{TA} \Rightarrow \frac{AP'}{TB} = \frac{AK}{TA}$$

۵. در خانه‌های یک جدول  $n \times m$  اعداد صحیح نوشته شده است. منظور از یک ردیف اریب، خانه‌هایی از جدول است که تفاضل شماره ستون و شماره سطر آن‌ها برابر مقداری ثابت است. می‌خواهیم طی چند مرحله اعداد داخل جدول را صفر کنیم. در هر مرحله می‌توانیم خانه‌های یک ردیف افقی یا یک ردیف عمودی و یا یک ردیف اریب را انتخاب و از همه یک واحد کم کنیم یا به همه یک واحد اضافه کنیم. ثابت کنید اگر بتوان اعداد داخل هر زیرجدول  $3 \times 3$  را، صرف نظر از خانه‌های دیگر، صفر کرد آن‌گاه می‌توان همه اعداد داخل جدول را صفر کرد. به عنوان مثال در جدول  $5 \times 9$  زیر، خانه‌های یکی از ردیف‌های اریب و خانه‌های یکی از زیرجدول‌های  $3 \times 3$  مشخص شده‌اند. توجه کنید که خانه گوشه بالا-راست-بالا (سطر ۱، ستون ۹) نیز به تنهایی یک ردیف اریب حساب می‌شود.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱							↘		
۲		*	*	*			↘		
۳		*	*	*				↘	
۴		*	*	*					↘
۵									

راه حل. ابتدا حکم مسأله را در حالتی که  $m, n \geq 3$  اثبات می‌کنیم. در حالتی که یکی از  $m$  و  $n$  کمتر از ۳ باشد، زیر جدول  $3 \times 3$  وجود ندارد. پس می‌توان هر زیر جدول  $3 \times 3$  آن را صفر کرد. در این حالت باید ثابت کنیم جدول را می‌توان با اعمال معرفی شده صفر کرد. این قسمت را در انتها ثابت می‌کنیم.

عدد نوشته‌شده در خانه‌ی سطر  $i$  و ستون  $j$  را با  $A(i, j)$  نشان می‌دهیم. یک زیرجدول  $3 \times 3$  در نظر بگیرید که خانه گوشه بالا-راست آن،  $(i, j)$  باشد. این زیرجدول را با  $S(i, j)$  نشان می‌دهیم. منظور از شاخص این زیر جدول، عدد حاصل از جمع زدن اعداد خانه‌های مشخص شده در شکل زیر با علامت‌های مشخص شده است، یعنی

$$A(i+1, j) - A(i+2, j) + A(i+2, j-1) - A(i+1, j-2) + A(i, j-2) - A(i, j-1)$$



خانه‌های مشخص شده در شکل بالا دارای این خاصیت هستند که هر ردیف افقی یا عمودی یا اریب، خانه‌های مشخص شده در شکل بالا را یا قطع نمی‌کند و یا در دو خانه با علامت مخالف قطع می‌کند. پس با انجام هر یک از اعمال مجاز در صورت مسأله، شاخص یک زیرجدول تغییر نمی‌کند. حال از آن‌جا که بنابر فرض، می‌توان اعداد هر

زیرجدول  $3 \times 3$  را صفر کرد، و چون شاخص در طول این فرآیند تغییر نمی کند پس شاخص هر زیرجدول  $3 \times 3$  از ابتدا صفر است و در طول فرآیند نیز صفر می ماند.

اکنون مقدمات لازم برای اثبات حکم را داریم. حکم را با استقرا روی  $m + n$  اثبات می کنیم. پایه استقرا در حالتی است که  $m + n = 6$ ، یعنی  $m = n = 3$ . در این حالت حکم بدیهی است چون کل جدول یک زیرجدول  $3 \times 3$  است. حال فرض کنید  $m + n > 6$ . پس دست کم یکی از  $m$  و  $n$  از ۳ بیش تر است. فرض می کنیم  $m > 3$  (حالت  $n > 3$  مشابه است). حال زیرجدولی از جدول اصلی را در نظر بگیرید که از حذف ستون آخر به دست آمده است. فرض استقرا برای این زیرجدول  $(m-1) \times n$  برقرار است. پس بنابر استقرا، می توان با استفاده از اعمال مجاز، همه اعداد این زیرجدول را صفر کرد. پس به جدولی می رسیم که تنها ستون آخر آن ممکن است ناصفر باشد. ادعا می کنیم که در این حالت اعداد ستون آخر به جز عدد خانه بالا-راست، باید برابر باشند. زیرجدول  $S(1, m)$  را در نظر بگیرید. شاخص این جدول برابر است با

$$A(2, m) - A(3, m) + A(3, m-1) - A(2, m-2) + A(1, m-2) - A(1, m-1) = A(2, m) - A(3, m)$$

از طرفی بنابر آنچه گفته شد، این شاخص باید صفر باشد. پس  $A(3, m) = A(2, m)$ . با در نظر گرفتن زیرجدول های  $S(3, m)$ ،  $S(4, m)$ ، ... و  $S(n-2, m)$  و تکرار استدلال فوق، مشابهاً نتیجه می شود  $A(4, m) = A(3, m)$ ،  $A(5, m) = A(4, m)$ ، ... و  $A(n, m) = A(n-1, m)$ . پس در ستون آخر، مقادیر همه خانه ها به جز خانه  $(1, m)$  با یکدیگر برابرند. پس با استفاده از تعدادی عمل مجاز روی ستون آخر می توان همه آن ها را صفر کرد و سپس با استفاده از ردیف اریبی که تنها از خانه  $(1, m)$  تشکیل شده، می توان خانه  $(1, m)$  را نیز صفر کرد و بنابراین کل جدول صفر می شود.

تنها می ماند حالتی را ثابت کنیم که حداقل یکی از  $m$  و  $n$  از ۳ کم تر باشند. مثلاً فرض کنید  $m < 3$  (حالت  $n < 3$  مشابه است). اگر  $m = 1$ ، به وضوح می توان با استفاده از سطرها، همه خانه ها را صفر کرد. اگر  $m = 2$ ، روش زیر را به کار می بریم.

ابتدا با استفاده از سطر  $m$ ،  $A(n, 1)$  را صفر می کنیم. سپس با استفاده از ردیف اریب گذرنده از خانه  $(n, 2)$ ،  $A(n, 2)$  را صفر می کنیم. سپس با استفاده از سطر  $(n-1)$ ،  $A(n-1, 1)$  را صفر می کنیم. سپس با استفاده از ردیف اریب گذرنده از خانه  $(n-1, 2)$ ،  $A(n-1, 2)$  را صفر می کنیم و همین فرآیند را ادامه می دهیم تا همه جدول صفر شود.

۶. دنباله  $\{a_n\}$  از اعداد طبیعی در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$a_{n+2} = \left[ \frac{2a_{n+1}}{a_n} \right] + \left[ \frac{2a_n}{a_{n+1}} \right]$$

که در آن منظور از  $[x]$ ، جزء صحیح عدد  $x$  است. ثابت کنید عدد طبیعی  $m$  وجود دارد که  $a_m = 4$  و  $a_{m+1} \in \{3, 4\}$ .

راه حل.

لم ۱. به ازای هر  $n \geq 3$  داریم:  $a_n \geq 3$

اثبات. فرض کنید  $a_n < 3$  اگر  $a_{n-1} \geq a_{n-2}$  نتیجه می‌شود

$$\frac{2a_{n-1}}{a_{n-2}} \geq 2 \Rightarrow \left[ \frac{2a_{n-1}}{a_{n-2}} \right] \geq 2 \Rightarrow \left[ \frac{2a_{n-2}}{a_{n-1}} \right] = 0 \Rightarrow a_{n-1} > 2a_{n-2} \Rightarrow \frac{2a_{n-1}}{a_{n-2}} > 4$$

که با فرض  $a_n < 3$  در تناقض است. در حالی که  $a_{n-2} \geq a_{n-1}$  نیز استدلال کاملاً مشابه است چون رابطه بازگشتی نسبت به دو جمله قبل متقارن است.

لم ۲. به ازای هر  $n \geq 3$  داریم:  $a_{n+2} < \max\{a_{n+1}, a_n\}$  یا  $a_{n+1} = a_n$ .

اثبات. فرض می‌کنیم  $a_{n+1} \neq a_n$  همچنین به علت تقارن رابطه بازگشتی بدون کاسته شدن از کلیت فرض می‌کنیم  $a_n = \max\{a_{n+1}, a_n\}$  پس:

$$\frac{2a_{n+1}}{a_n} < 2$$

از طرفی

$$a_{n+1}, a_n \geq 3 \Rightarrow \frac{2a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{2a_n}{3} \Rightarrow a_{n+2} = \left[ \frac{2a_{n+1}}{a_n} \right] + \left[ \frac{2a_n}{a_{n+1}} \right] \leq 1 + \frac{2a_n}{3} \leq \frac{a_n}{3} + \frac{2a_n}{3} = a_n$$

و با توجه به فرض  $a_{n+1} \neq a_n$  هر دوی نابرابری‌های  $\frac{2a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{2a_n}{3}$  و  $1 \leq \frac{a_n}{3}$  نمی‌توانند تساوی باشند و حکم نتیجه می‌شود.

لم ۳.  $k$  وجود دارد که  $a_k = a_{k+1}$

اثبات. اگر چنین نباشد طبق لم ۲ برای هر  $n \geq 3$ :

$$a_{n+2} < \max\{a_{n+1}, a_n\}$$

و

$$a_{n+2} < \max\{a_{n+2}, a_{n+1}\}$$

در حالی که  $a_{n+2} < a_{n+1}$  نتیجه می‌شود  $a_{n+2} < a_{n+1}$  یعنی

$$\max\{a_{n+2}, a_{n+2}\} < \max\{a_{n+1}, a_n\}$$

و در حالی که  $a_{n+2} > a_{n+1}$  نیز نتیجه می‌شود

$$\max\{a_{n+2}, a_{n+2}\} < \max\{a_{n+1}, a_n\}$$

یعنی ماکزیمم جفت جمله‌های متوالی همواره اکیداً نزولی است که غیر ممکن است. توجه کنید که این استدلال نتیجه می‌دهد که دو جمله برابر و متوالی بی‌نهایت بار در دنباله ظاهر می‌شود.

حال توجه کنید که همواره پس از دو جمله برابر در دنباله عدد ۴ ظاهر می‌شود و اگر آن دو عدد برابر ۳ یا ۴ باشند مطلوب حاصل می‌شود چون اگر ۳ و ۴ پشت سر هم بیایند جمله بعد از ۴ هم ۳ می‌شود. اما اگر آن دو عدد برابر بزرگتر از ۴ باشند مثلاً  $a_k = a_{k+1} > 4$  اگر اولین باری که دو عدد مساوی دیگر در دنباله ظاهر می‌شود  $a_{k+m} = a_{k+m+1}$  باشد که  $m$  فرد است، با توجه به اثبات لم ۳ داریم:

$$a_{k+1} = \max\{a_{k+1}, a_{k+2} = 4\} > \max\{a_{k+2}, a_{k+3}\} > \dots > \max\{a_{k+m}, a_{k+m+1}\} = a_{k+m}$$

و در حالتی که  $m$  زوج است داریم:

$$a_{k+1} = \max\{a_{k+1}, a_{k+2} = 4\} > \max\{a_{k+2}, a_{k+3}\} > \dots > \max\{a_{k+m-1}, a_{k+m}\} \geq a_{k+m}$$

یعنی تا وقتی اعداد متوالی برابر بیش از ۴ باشند همواره یک جفت برابر متوالی کمتر از جفت برابر متوالی قبلی است ولی این روند نمی‌تواند تا بی‌نهایت ادامه یابد و پس از مدتی به دو عدد ۳ یا ۴ متوالی می‌رسیم که مطلوب ما را به دست می‌دهد.

دوره سالانه

نخفیف ویژه  
برای تیزلاینی ها

# آکادمی تیزلاین

## برگزاری می کند:



دکتر میثم کوهگرد

کلاس آنلاین المپیاد  
فیزیک (سطح یک)

پنجشنبه‌ها ۱۵:۱۸ تا ۱۹:۳۰

شروع از ۲۷ آبان

۵ جلسه  
۶۰۰ هزار تومان



دکتر افشین بهرام

کلاس آنلاین المپیاد  
ریاضی (سطح یک)

یکشنبه‌ها ۲۰:۱۵ تا ۲۱:۱۵

شروع از ۲۳ آبان

۵ جلسه  
۶۰۰ هزار تومان



دکتر رضا رحمت‌الزاده

کلاس آنلاین المپیاد  
شیمی (سطح یک)

شنبه‌ها ۲۰:۱۵ تا ۲۱:۱۵

شروع از ۲۲ آبان

۵ جلسه  
۶۰۰ هزار تومان



دکتر قربانی

کلاس آنلاین المپیاد  
زیست‌شناسی (سطح دو)

سه‌شنبه‌ها ۲۰:۱۵ تا ۲۱:۱۵

شروع از ۲۵ آبان

۲۰ جلسه  
۸۰۰ هزار تومان



دکتر میثم کوهگرد

کلاس آنلاین المپیاد  
فیزیک (سطح دو)

پنجشنبه‌ها ۲۰:۱۵ تا ۲۱:۱۵

شروع از ۲۷ آبان

۲۰ جلسه  
۸۰۰ هزار تومان



دکتر قربانی

کلاس آنلاین المپیاد  
زیست‌شناسی (سطح یک)

سه‌شنبه‌ها ۱۵:۱۸ تا ۱۹:۳۰

شروع از ۲۵ آبان

۵ جلسه  
۶۰۰ هزار تومان

#تیزلاینی\_شو

ثبت نام در سایت رسمی



tizline.ir  
www.tizline.ir



۰۲۱-۹۱۳۰۲۲۰۲



۰۲۰۲ ۳۸۴-۰۹۳۳



# آکادمی آموزشی تیزلاین <

## تقویم آموزشی آکادمی تیزلاین

سال ۱۴۰۱-۱۴۰۰

#تیزلاینی\_شو

ترم دو  
دوره  
سالانه

آغاز ثبت نام: ۱ دی

شروع دوره: ۱ بهمن

پایان دوره: ۲۵ اردیبهشت

۱۵ جلسه

ترم یک  
دوره  
سالانه

آغاز ثبت نام: ۱ شهریور

شروع دوره: ۱۰ مهر

پایان دوره: ۱۸ دی

۱۵ جلسه

ترم  
تابستان

آغاز ثبت نام: ۱۰ خرداد

شروع دوره: ۱۲ تیر

پایان دوره: ۲۰ شهریور

۱۰ جلسه

آنلاین تخصص ماست

کلاس ، آزمون ، مشاوره ، تکلیف

ثبت نام در سایت رسمی آکادمی تیزلاین [www.Tizline.ir](http://www.Tizline.ir)

آزمون های هماهنگ از ۲۵ مهر تا ۱۱ اردیبهشت

@mathmovie6

Tizline.ir

[www.Tizline.ir](http://www.Tizline.ir)

@tizline

۰۹۳۳ ۳۸۴ ۰۲۰۲

۵۰۰۰۲۶۹۱۳۲۴

۰۲۱ ۴۴۱۳ ۶۹۷۵

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور