



آکادمی آنلاین تیز لاین

قوی ترین پلتفرم آموزشی تیز هوشان

برگزار کننده کلاس های آنلاین و حضوری تیز هوشان ✓

و المپیاد از پایه چهارم تا دوازدهم

آزمون های آنلاین و حضوری ✓

مشاوره تخصصی ✓

با اسکن QR کد روبرو
وارد صفحه اینستاگرام
آکادمی تیز لاین شو و از
محتوه های آموزشی
رایگان لذت ببر



TIZLINE.IR

برای ورود به صفحه اصلی سایت آکادمی تیز لاین کلیک کنید

برای دانلود دفترچه آزمون های مختلف برای هر پایه کلیک کنید

برای مطالعه مقالات بروز آکادمی تیز لاین کلیک کنید

آکادمی آموزشی تیزلاین

۱. به چند طریق می‌توان اعداد $1, 2, \dots, 6$ را در یک ردیف نوشت به طوری که از بین هر دو عدد مجاور یکی بر دیگری بخش‌پذیر باشد؟

۱۰) ۵

۸) ۴

۶) ۳

۴) ۲

۲) ۱

پاسخ: گزینه ۲ درست است.

تنها عددی که می‌تواند مجاور ۵ باشد ۱ است پس ۵ باید راست‌ترین یا چپ‌ترین عدد ردیف باشد. بنابر تقارن فرض می‌کنیم ۵ راست‌ترین باشد و در انتهای تعداد حالات را دو برابر می‌کنیم، پس دو عدد راست ردیف ۱, ۵ هستند. از آنجا که عدد ۳ تنها می‌تواند مجاور ۱ و ۶ باشد برای مکان آن دو حالت وجود دارد. حالت اول این است که مجاور یک باشد در این صورت به راحتی بدست می‌آید که اعداد ردیف باید به شکل $1, 5, 3, 1, 5, 4, 2, 6, 3$ باشند. حالت دوم این است که چپ‌ترین عدد ردیف باشد و در این حالت نیز به سادگی نتیجه می‌شود اعداد ردیف باید به شکل $5, 1, 6, 2, 4, 3$ باشند. پس جواب نهایی برابر می‌شود با $2 \times 2 = 4$.

۲. مثلث قائم‌الزاویه ABC با فرض $\angle BAC = 90^\circ$ را در نظر بگیرید. دایره‌ای به مرکز A طوری رسم می‌کنیم که ضلع AB را در D , ضلع AC را در F و ضلع BC را در دو نقطه E و M قطع کند که نقطه E بین نقاط D و M است. می‌دانیم M وسط ضلع BC است و همچنین نسبت طول کمان‌های \widehat{DE} به \widehat{MF} برابر با نسبت ۳ به ۲ به ۴ است. مقدار قدر مطلق تفاضل دو زاویه حاده مثلث ABC چقدر است؟

۱۰) ۵

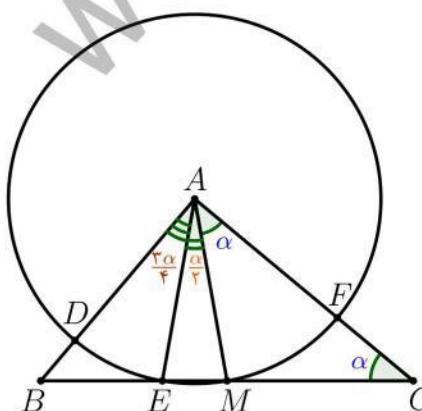
۳۰) ۴

۴۵) ۳

۵۰) ۲

۷۰) ۱

پاسخ: گزینه ۵ درست است.



از آنجا که در مثلث قائم‌الزاویه میانه نصف وتر است بدست می‌آید $AM = MC$ پس $\angle MAC = \alpha$ همچنین طبق شرط سوال می‌توان نوشت

$$\angle EAM = \frac{1}{2} \angle MAF = \frac{1}{2}\alpha, \quad \angle DAE = \frac{3}{4} \angle MAF = \frac{3}{4}\alpha$$

@mathmovie6

@Tizline.ir

آکادمی آموزشی تیزلاین

در نتیجه

$$90^\circ = \angle MAF + \angle MAE + \angle EAD = \frac{3}{4}\alpha + \frac{1}{2}\alpha + \alpha = \frac{9}{4}\alpha \implies \alpha = 40^\circ$$

پس $\angle B = 50^\circ$ و جواب مسئله 10° می‌شود.

۳. جناب خان می‌خواهد برای گاوصدوق خود رمز انتخاب کند و هر هفته رمز آن را تغییر دهد! رمز گاوصدوق یک عدد سه‌ رقمی است و جناب خان مایل است ارقام رمز متمایز باشند و به علاوه ارقام رمز جدید، از ارقام متناظر در رمز قبلی کمتر نباشد. مثلًا اگر یک بار ۲۵۹ را انتخاب کرد رمز بعدی نباید ۱۵۹ باشد. اگر اولین رمز گاوصدوق 140° باشد، او حداقل بعد از چند هفته دیگر نمی‌تواند به این شکل رمز گاوصدوقش را تغییر دهد؟ (توجه کنید که هفته اول، رمز همان 140° خواهد بود.)



۱۶ (۵)

۱۹ (۴)

۲۰ (۳)

۲۴ (۲)

۲۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ درست است.

از آنجا که رمچهای رمز باید متفاوت باشند بزرگ‌ترین عددی که برای رمز می‌تواند استفاده شود از ارقام ۷، ۸ و ۹ تشکیل شده است. وقت کنید که پس از هر هفته مجموع ارقام رمز حداقل یک واحد اضافه می‌شود پس جناب خان حداقل

$$9 + 8 + 7 - (1 + 4 + 0) = 19$$

هفته دیگر می‌تواند رمز انتخاب کند که با احتساب هفته اول می‌شود 20° هفته. حالا مثالی برای 20° هفته ارائه می‌دهیم:

$$140, 150, \dots, 190, 290, \dots, 890, 891, \dots, 897.$$

۴. تابع $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ مفروض است. برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $m \in \mathbb{Z}$ با شرط 1 :

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n+1}$$

که منظور از (m, n) بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک m و n است. کدام یک از گزاره‌های زیر درباره تابع f درست است؟

(۲) تابع f یک‌به‌یک است.

(۴) به ازای هر $x \in \mathbb{Q}$ داریم $f(x) \leq x$

(۱) تابع f یک‌به‌یک است.

(۳) برد تابع f همه اعداد گویا است.

(۵) همه گزینه‌ها صحیح هستند.

آکادمی آموزشی تیزلاین

پاسخ: گزینه ۳ درست است.

واضح است که برای هر n طبیعی، $1 = (n, n+1)$. در تساوی داده شده قرار می‌دهیم $1 = m = n + 1$ که نتیجه می‌دهد $1 = f\left(\frac{n+1}{n}\right)$ پستابع یک به یک نیست و گزینه اول رد می‌شود. اگر جفت‌های $(1, 2), (2, 3)$ و $(3, 4)$ را به جای (m, n) قرار دهیم، می‌توان نوشت $1 < f\left(\frac{5}{3}\right) > f(1) > 2$ اما $f\left(\frac{5}{3}\right) < f(1)$ در نتیجه تابع یک‌نواهم نیست و گزینه دوم رد می‌شود. برای رد کردن گزینه چهارم کافی است به این توجه کنیم که $1 = -\frac{1}{3} < f(-1)$. حالا درستی گزینه سوم را اثبات می‌کنیم. عدد گویای دلخواه $\frac{a}{b}$ را در نظر می‌گیریم. می‌توانیم فرض کنیم $b \in \mathbb{N}$. واضح است که $1 = a - b$ در برد f هستند پس فرض می‌کنیم حداقل یکی از دو عدد $|a|$ و b از یک بیشتر هستند. نشان می‌دهیم $1 = (a^3, a^3b - 1)$. فرض کنید p عامل اول مشترکی از دو عدد باشد. می‌توان نوشت

$$p | a^3 \Rightarrow p | a \Rightarrow p | a^3b \Rightarrow p | 1$$

که تناقض است. پس می‌توانیم قرار دهیم $1 = a^3b - 1$ و $m = a^3b$ (دقت کنید طبق فرض‌هایی که برای a و b وضع کردہ‌ایم n عددی طبیعی است) و نتیجه می‌شود $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{a}{b}$ پس f پوشاست. ■

۵. چند عدد سه رقمی \overline{abc} وجود دارد که مربع کامل باشد و اگر یک واحد به رقم صدگان، دو واحد به رقم دهگان و سه واحد به رقم یکان آن اضافه شود، حاصل سه رقمی و مربع کامل باشد؟

۴ (۵)

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ درست است.

قرار می‌دهیم $x^2 = \overline{abc}$ همچنین عدد حاصل را نیز y تعریف می‌کنیم که y اعدادی طبیعی هستند. می‌توان نوشت

$$x^2 + 123 = y^2 \Rightarrow 123 = y^2 - x^2 = (y-x)(y+x)$$

می‌دانیم $123 = 3 \times 41$ پس دو حالت وجود دارد: حالت اول $y-x = 1$ و $y+x = 123$ که واضح است در این حالت y سه رقمی نمی‌شود. حالت دوم $y-x = 3$ و $y+x = 41$ که جواب $\overline{361} = abc$ را به دست می‌دهد پس مسئله تنها یک جواب دارد. ■

۶. با استفاده از همه ارقام ۱ تا ۹، سه عدد سه رقمی با ارقام متمایز ساخته‌ایم و بزرگ‌ترین آن‌ها را A نامیده‌ایم. کمترین مقدار ممکن برای A چند است؟

۳۱۲ (۵)

۳۹۸ (۴)

۹۱۲ (۳)

۱۹۸ (۲)

۳۴۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ درست است.

آکادمی آموزشی تیزلاین

کمترین مقدار ممکن برای صدگان A , ۳ است زیرا ارقام متمایزند و صدگان دو عدد دیگر حداقل ۱ و ۲ است. همچنین اگر صدگان A برابر با ۳ باشد ارقام ۱ و ۲ برای صدگان دو عدد دیگر استفاده شده‌اند در نتیجه حداقل A می‌تواند ۳۴۵ باشد، که اگر سه عدد ۱۶۷, ۲۸۹ و ۳۴۵ باشند این اتفاق رخ می‌دهد. ■

۷. برای $A, B \subseteq \mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم $A \otimes B = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$. چند تا از گزاره‌های زیر درست است؟ (\mathbb{Q}' نماد مجموعه اعداد گنگ است).

$$\mathbb{Q}' \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \{0\} \quad \bullet$$

$$\{\sqrt{2}, 5\} \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \{0\} \quad \bullet$$

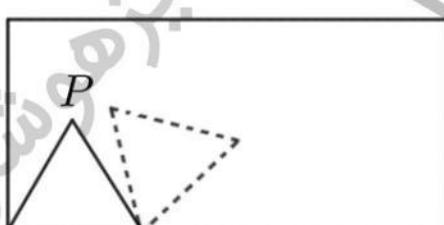
$$\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}' \quad \bullet$$

$$\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\} \otimes \mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \{0\} \quad \bullet$$

(۱) چهار (۲) سه (۳) دو (۴) یک (۵) صفر

پاسخ: گزینه ۲ درست است.

واضح است که گزاره ۳ صحیح نیست زیرا صفر در مجموعه سمت چپ وجود دارد اما عددی گنگ نیست. حالا درستی سه گزاره دیگر را نشان می‌دهیم. ابتدا درستی گزاره ۴ را نشان می‌دهیم و به راحتی از آن درستی گزاره ۱ نیز نتیجه می‌شود (زیرا $\sqrt{2}, \sqrt{3} \in \mathbb{Q}'$). فرض کنید q عددی گویا و ناصرف باشد. می‌توان به سادگی نشان داد که $\frac{q}{\sqrt{2}}$ عددی گنگ است پس همه اعداد گویای ناصرف تولید می‌شوند. حالا فرض کنید q' عددی گنگ باشد. اگر هر دو عدد $\frac{q}{\sqrt{2}}$ و $\frac{q'}{\sqrt{2}}$ گویا باشند نسبت آن‌ها نیز گویا است اما به راحتی می‌توان بررسی کرد که $\frac{q}{\sqrt{2}}$ گویا نیست پس حداقل یکی از آن‌ها گنگ است و در نتیجه همه اعداد گنگ نیز تولید می‌شوند. به طور مشابه می‌توان درستی گزاره ۲ را نیز نشان داد. ■



۸. مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد درون و روی محیط یک مستطیل 4×2 ، مانند شکل، می‌غلطد. رأس P ، که در شکل مشخص شده، از ابتدای حرکت تا زمانی که برای اولین بار به مکان اولیه‌اش بازگردد، چه مسافتی را طی می‌کند؟

(۱) $\frac{10\pi}{3}$ (۲) 3π (۳) 4π (۴) $\frac{7\pi}{3}$ (۵) 2π

پاسخ: گزینه ۱ درست است.

اگر P راس چرخش نباشد، در طول اضلاع به اندازه کمان 120° و در گوشۀ مستطیل به اندازه کمان 30° از یک دایره به شعاع ۱ حرکت می‌کند. پس مجموع کمان‌هایی که P حرکت می‌کند برابر می‌شود با

$$120^\circ + 120^\circ + 30^\circ = 600^\circ$$

آکادمی آموزشی تیزلاین

پس مجموع حرکت P برابر می‌شود با

$$\frac{600}{360} \times 2\pi = \frac{10\pi}{3}$$

۹. چند سه‌تایی مرتب (x, y, z) وجود دارد که x, y, z ارقام ناصف و متمایز باشند و $y \times x$ بر z بخش‌پذیر باشد؟

۱۵۶ (۵) ۱۵۲ (۴) ۱۴۸ (۳) ۱۴۴ (۲) ۱۴۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ درست است.

روی مقادیر مختلف z حالت‌بندی می‌کنیم. واضح است که برای $z = 5, 7$ هیچ جفتی نمی‌توانیم انتخاب کنیم. اگر $z = 1$ باشد طبق اصل ضرب برای دو عدد دیگر $8 \times 7 = 56$ ۸ حالت وجود دارد. اگر $z = 2$ ، از آن‌جا که 5 رقم فرد داریم $20 \times 4 = 5$ ۵ حالت وجود دارد که $y \times x$ فرد شود پس طبق اصل متمم $36 - 20 = 56$ ۵۶ حالت وجود دارد. اگر $z = 3$ ، مشابه حالت قبل نتیجه می‌شود که $26 - 20 = 56 - 36 = 12$ ۱۲ حالت وجود دارد. اگر $z = 4$ ، در صورتی که هیچ‌کدام از y, x برابر با ۸ نباشند تنها دو حالت $(6, 2), (2, 6)$ وجود دارد و اگر یکی از آن‌ها ۸ باشد 7×2 حالت وجود دارد و در مجموع تعداد حالات $16 + 2 = 18$ می‌شود. اگر $z = 6$ ، یکی از y, x باید مضربی از ۲ باشد و دیگری مضربی از ۳ پس $12 = 2 \times 3 \times 2$ ۱۲ حالت وجود دارد. برای $z = 8$ و $z = 9$ نیز واضح است که به ترتیب ۴ و ۲ حالت وجود دارد. نهایتاً تعداد حالات کل برابر است با

$$56 + 36 + 26 + 16 + 12 + 4 + 2 = 152.$$

۱۰. اعداد ۱، ۲، ... و ۱۳۹۵ روی تخته نوشته شده و ما به این شکل آن‌ها را خط می‌زنیم: هر بار بزرگ‌ترین عددی که تا قبل از آن خط نخورده را انتخاب و همه مقسم علیه‌های آن را به ترتیب از بزرگ به کوچک خط می‌زنیم و سپس مجدداً به سراغ بزرگ‌ترین عدد خط‌نخورده می‌رویم و همین کار را تکرار می‌کنیم تا همه اعداد خط بخورند. آخرین عددی که خط می‌خورد کدام است؟

۷۰۳ (۵) ۷۰۱ (۴) ۶۹۸ (۳) ۴۱ (۲) ۳۷ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ درست است.

دقت کنید که هر عدد کوچک‌تر از ۶۹۸ مضربی از ۶۹۸ تا ۱۳۹۵ دارد زیرا اگر $x < 698$ آن‌گاه عدد طبیعی n وجود دارد که $1395 \leq 2^n x \leq 698$ (زیرا $1396 = 698 \times 2$) پس زمانی که همه اعداد بزرگ‌تر از ۶۹۸ خط بخورند تنها امکان دارد ۶۹۸ و مقسم علیه‌های آن باقی‌مانده باشند. واضح است که ۶۹۸

آکادمی آموزشی تیزلاین

نخورده است همچنین به راحتی می‌توان بررسی کرد که سه مقسوم علیه دیگر آن مضرب دیگری بزرگتر از ۶۹۸ دارند و قبل از خودهاند پس آخرین عددی که خط می‌خورد ۶۹۸ است.

۱۱. عمل * را در مجموعه اعداد حقیقی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x * y = \frac{x + y}{1 - xy}$$

اگر a, b, c ریشه‌های $x^3 - 3x^2 - 2x + 5 = 0$ باشند، مقدار $a * (b * c)$ کدام است؟

-۲ (۵)

$\frac{1}{3}$ (۴)

-۸ (۳)

$-\frac{2}{3}$ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ درست است.

می‌توان نوشت

$$a * (b * c) = a * \frac{b + c}{1 - bc} = \frac{a + \frac{b+c}{1-bc}}{1 - \frac{a(b+c)}{1-bc}} = \frac{a + b + c - abc}{1 - (ab + bc + ca)}$$

از طرف دیگر نیز داریم

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 5 = (x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc$$

$$\text{پس } ab + bc + ca = -2, a + b + c = 3 \text{ و با قرار دادن این روابط در تساوی اول پاسخ}$$

بدست می‌آید که برابر با $\frac{1}{3}$ است.

۱۲. تعداد سه‌تایی‌های مرتب (a, b, c) از اعداد طبیعی را بباید که در شرط زیر صدق کنند:

$$a(b, c) = b(c, a) = c(a, b) = 2^6 \times 3^8 \times 5^{10}$$

(منظور از (a, b) بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک a و b است).

۷۲۰ (۵)

۱۶۲۰ (۴)

۲۰۰۰ (۳)

۲۰۸۰ (۲)

۳۲۴۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ درست است.

دقت کنید که عوامل اول a, b, c تنها می‌توانند ۲, ۳, ۵ باشند. فرض کنید توان ۲ در a, b, c به ترتیب α, β, γ باشد. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم $\gamma \leq \beta \leq \alpha$. می‌توان نوشت

$$\beta + \min\{\alpha, \gamma\} = \gamma + \min\{\alpha, \beta\} \implies \beta + \alpha = \gamma + \alpha \implies \beta = \gamma$$

از طرف دیگر نیز داریم $\alpha + \beta = 6$. این معادله جواب‌های

$$(\alpha, \beta) = (0, 6), (1, 5), (2, 4), (3, 3)$$

@mathmovie6

@Tizline.ir

آکادمی آموزشی تیزلاین

بازدید از آموزشگاه کشوری تیزهوشان و کنکور

را دارد (از آن جا که $\beta \leq \alpha$). برای هر کدام از سه جواب اول ۳ حالت برای توان‌های ۲ در a, b, c وجود دارد زیرا α می‌تواند توان دوی هر یک از سه عدد باشد و توان دوی ۲ عدد دیگر به طور یکتا مشخص می‌شود اما در جواب چهارم تنها ۱ حالت وجود دارد. پس مجموعاً ۱۰ حالت متفاوت برای توان‌های ۲ وجود دارد. به طور مشابه می‌توانیم بینیم که برای توان‌های ۳ و ۵ به ترتیب ۱۳ و ۱۶ حالت وجود دارد و طبق اصل ضرب تعداد کل حالات برابر با $16 \times 13 = 208$ می‌شود.

۱۳. می‌خواهیم با چیدن ۱۲ آجر مکعبی به ضلع واحد، بر روی میز، مکعب مستطیلی به طول ۳ عرض ۲ و ارتفاع ۲ واحد، بسازیم. طبیعتاً یک مکعب بالایی را نمی‌توان قبل از مکعب زیری، سر جایش گذاشت. به چند روش متفاوت می‌توان این مکعب مستطیل را ساخت؟ (توجه داشته باشید که مکعب‌ها از نظر ما تفاوتی ندارند و مسئله ترتیب پر کردن ۱۲ محل مکعب مستطیل است).

$$7484400 \quad (5) \quad 924 \quad (4) \quad 324 \quad (3) \quad 144 \quad (2) \quad 36 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۵ درست است.

جایگاه‌های ردیف پایین را با ۱ تا ۶ شماره‌گذاری می‌کنیم و برای $i \leq 6$ جایگاه بالای شماره i را با $i+6$. مسئله به این تبدیل می‌شود که چند حالت برای قرار دادن اعداد ۱ تا ۱۲ پشت سر هم وجود دارد به‌طوری که برای هر $i \leq 6$ قبل از $i+6$ آمده باشد. طبق تقارن به ازای هر شرط نصف حالات کل حذف می‌شود پس تعداد حالات برابر است با

$$\frac{12!}{2^6} = 7484400.$$

۱۴. اعدادی دوبعدی متمایزند. می‌دانیم سه معادله درجه دوی زیر ریشه‌ای مشترک دارند.

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad bx^3 + cx^2 + ax + d = 0, \quad cx^3 + dx^2 + bx + a = 0.$$

مقدار آن ریشه مشترک چند است؟

$$(5) \text{ به‌طور یکتا تعیین نمی‌شود.} \quad (4) \quad 1 \quad -1 \quad (3) \quad \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad (2) \quad 0 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴ درست است.

با جمع کردن سه معادله با هم بدست می‌آید

$$(a+b+c)(x^3 + x + 1) = 0$$

از آن جا که پرانتر دوم ریشه حقیقی ندارد نتیجه می‌شود $x = -1$. حالا می‌توان نوشت

$$0 = ax^3 + bx^2 - a - b = a(x-1)(x+1) + b(x-1) = (x-1)(ax+a+b)$$

آکادمی آموزشی تیزلاین

پس $x = 1$ یا $x = -\frac{a+b}{a}$ به طور مشابه از معادله دوم نیز بدست می‌آید $x = -\frac{a+b}{b}$ و از آن جا که a, b متمایزند تنها حالت ممکن $x = 1$ است.

۱۵. عدد سیب داریم که ۹۰۰ عدد آن‌ها سالم و مابقی لکه‌دار هستند. آن‌ها را در تعدادی جعبه پخش می‌کنیم به‌طوری که تعداد سیب‌ها در هر جعبه با جعبه دیگر برابر باشد. در حداقل و حداً کثر چند درصد جعبه‌ها اکثریت سیب‌ها سالم است؟

- (۱) ۹۰ و ۵۰ (۲) ۵۰ و ۱۰۰ (۳) ۸۰ و ۹۰ (۴) ۱۰۰ و ۸۰ (۵) ۹۰ و ۱۰۰

پاسخ: گزینه ۴ درست است.

اگر فقط ۱ جعبه داشته باشیم واضح است که در ۱۰۰ درصد جعبه‌ها اکثریت سیب‌ها سالم است. هر جعبه‌ای که حداقل نصف سیب‌هایش لکه‌دار هستند را خراب می‌نامیم. فرض می‌کنیم هر جعبه دارای n سیب باشد، آن‌گاه برای خراب کردن هر جعبه حداقل $\frac{n}{2}$ سیب لکه‌دار نیاز است در نتیجه حداً کثر $\frac{1}{n}$ جعبه خراب داریم. از طرف دیگر تعداد جعبه‌ها $\frac{1000}{n}$ است پس حداً کثر

$$\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1000}{n}} = 20\%$$

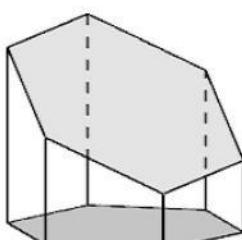
جعبه‌ها خراب است و حداقل در ۲۰٪ جعبه‌ها اکثریت سیب‌ها سالم است.

۱۶. چند زوج مرتب (m, n) از اعداد طبیعی داریم که $[1, 2, \dots, m] = 1395 \times [1, 2, \dots, n]$. (منظور از نماد $[1, 2, \dots, m]$ کوچک‌ترین مضرب مشترک مثبت اعداد $1, 2, \dots, m$ است.)

- (۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) سه (۵) چهار

پاسخ: گزینه ۱ درست است.

تعریف می‌کنیم $[1, 2, \dots, n] = M$. دقت کنید که N برابر با حاصل ضرب بزرگ‌ترین توان‌ها از عوامل اول اعداد کوچک‌تر یا مساوی n است. از آن‌جا که $1395 = 9 \times 155$ باید داشته باشیم $m > 3n$. پس بزرگ‌ترین توان عامل ۲ در M بیش‌تر از بزرگ‌ترین توان عامل ۲ در N است که تناقض است. پس مسئله جوابی ندارد.



۱۷. یک منشور قائم با قاعده شش‌ضلعی منتظم به ضلع واحد را توسط یک صفحه برش زده‌ایم. اگر فاصله رئوس این سطح مقطع تا قاعده پایین به ترتیب برابر $2, 3, x, y, z$ باشد، $x + y + z$ چقدر است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) ۲۴ (۵) ۲۶

پاسخ: گزینه ۴ درست است.

آکادمی آموزشی تیزلاین

با حضور اساتید بزرگده کشوری تیزهوشان و کنکور

لم. در ذوزنقه قائم‌الزاویه $ABCD$ که $\angle DAB = \angle ABC = 90^\circ$ می‌توان نوشت

$$CD^2 = (AD - BC)^2 + AB^2.$$

اثبات. به عهده خواننده!

دقت کنید که در ۶ ضلعی که توسط صفحه ایجاد می‌شود هر دو ضلع روبرو موازی و مساوی هستند. پس اگر ذوزنقه‌های قائم‌الزاویه روبرو به هم را در نظر بگیریم طبق لم اختلاف قاعده‌های آن‌ها برابر است. از همین نکته می‌توانیم نتیجه بگیریم

$$y - 11 = 3 - 2 \Rightarrow y = 12$$

و از طرف دیگر

$$z - 11 = 3 - x \Rightarrow x + z = 14 \Rightarrow x + y + z = 26.$$



۱۸. در شهر ساده‌لوحان شایعه‌ها به سرعت پخش می‌شود؛ اگر آقای خالی‌بند، بخواهد شایعه‌ای را پخش کند ابتدا آن شایعه را به یک نفر دیگر منتقل می‌کند. در ادامه هر روز آقای خالی‌بند و هر کسی که شایعه را در یکی از روزهای گذشته شنیده آن را به فرد جدیدی منتقل می‌کند. پس از آنکه تعداد افرادی که شایعه را شنیده‌اند از مرز یک میلیون نفر گذشت، چند نفر شایعه را مستقیماً یا با یک واسطه از آقای خالی‌بند شنیده‌اند؟

۵۲۴۲۸۸ (۵)

۵۰۰۰۰۰ (۴)

۱۰۲۴ (۳)

۲۱۰ (۲)

۲۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ درست است.

واضح است که بعد از هر روز تعداد افرادی که شایعه را می‌دانند دو برابر می‌شود پس بعد از ۲۰ روز این تعداد از مرز یک میلیون نفر می‌گذرد. حالا نفر i -امی که آقای خالی‌بند شایعه را به او گفته است در طی این ۲۰ روز به $1 - i$ نفر دیگر گفته است در نتیجه جواب برابر است با

$$20 + 19 + \dots + 1 = 210.$$

۱۹. چند زوج مرتب از اعداد حقیقی (x, y) وجود دارد که در دستگاه معادلات زیر صدق کند؟

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y = 0 \\ 2x^2 - 2xy - 3y^2 - 2x + 5y = 0 \end{cases}$$

آکادمی آموزشی تیزلاین

۶ (۵)

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ درست است.

تساوی اول را می‌توانیم به شکل زیر بنویسیم

$$= (x - y)^2 + (x - y) - y(x - y) = (x - 2y + 1)(x - y)$$

پس دو حالت وجود دارد: حالت اول $y = x$ که با گذاردن آن در تساوی دوم بهدست می‌آید

$$= 2x^2 - 2x^2 - 3x^2 - 2x + 5x = -3x^2 + 3x \Rightarrow x = 0, 1$$

پس به دو جواب ۱ و ۰ می‌رسیم. حالت دوم $x = y = 2y - 1$ که باز هم با گذاردن آن در تساوی دوم بهدست می‌آید

$$= 2(2y - 1)^2 - 2(2y - 1)y - 3y^2 - 2(2y - 1) + 5y = y^2 - 5y + 4 \Rightarrow y = 1, y = 4$$

پس به دو جواب ۱ و ۴ می‌رسیم. در نتیجه در مجموع دو حالت سه جواب وجود دارد. ■



۲۰. خیابان‌کشی محله‌ای به شکل رویه‌رو

است: سه خیابان افقی و ده خیابان عمودی.

پلیسی می‌خواهد به همه تقاطع‌ها سرکشی

کند به طوری که از تقاطع راست-بالا شروع

کند، از هر تقاطع دقیقاً یک بار عبور کند و در انتهای به تقاطع راست-بالا برگردد. این کار به چند روش مختلف ممکن است؟

۳۶ - ۳۵ (۵)

۲۴ (۴)

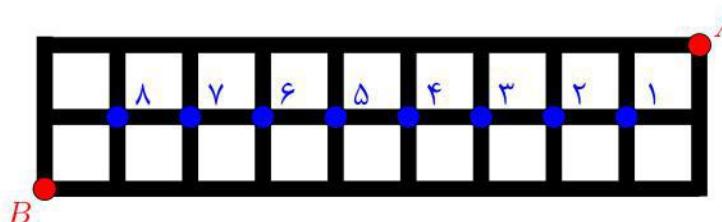
2×3^4 (۳)

۳۵ (۲)

۲۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱ درست است.

چند تقاطع را مانند شکل زیر نام‌گذاری می‌کنیم:



یک مسیر رفت از نقطه A به B داریم و یک مسیر برگشت از نقطه B به A. برای شروع حرکت دو انتخاب داریم و پس از آن با کمی بررسی متوجه می‌شویم هیچ سه تقاطع میانی نمی‌توانند به طور متوالی طی شوند

آکادمی آموزشی تیزلاین

همچنین جفت تقاطع‌های (۱، ۲)، (۳، ۴) و (۵، ۶) باشد به طور متوالی طی شوند و اگر مشخص کنیم هر کدام از این جفت تقاطع‌ها در مسیر رفت یا برگشت طی می‌شوند مسیر به طور یکتا مشخص می‌شود. در نتیجه تعداد کل حالات برابر می‌شود با

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5.$$



۲۱. خیابان‌های محله‌ای به نام پهران مانند شکل روبرو شامل ۹ تقاطع و ۱۲ خیابان است. (مسیر بین هر دو تقاطع یک خیابان است). هر شب در این محله ۹۰ خودرو پارک می‌شود که همگی داخل خیابان‌ها و نه در تقاطع‌ها قرار دارند. در هر تقاطع میانگین تعداد خودروهای موجود در خیابان‌های متصل به آن تقاطع را ظرفیت پارک آن تقاطع می‌نامیم. می‌دانیم که مجموع ظرفیت پارک ۹ تقاطع، برابر ۶۶ است. کدام یک از گزاره‌های زیر حتماً درست است؟

- (۱) ظرفیت پارک تقاطع مرکزی محله، بیشتر از تقاطع‌های دیگر است.
- (۲) در هر یک از خیابان‌هایی که در حاشیه محله واقع است، دست کم ۶ خودرو پارک شده است.
- (۳) در یکی از خیابان‌هایی که در حاشیه محله واقع است، دست کم ۸ خودرو پارک شده است.
- (۴) در یکی از خیابان‌های متصل به مرکز محله، دست کم ۹ خودرو پارک شده است.
- (۵) گزینه‌های ۱ و ۴.

پاسخ: گزینه ۴ درست است.

مجموع خودروهای مرکزی محله را x و مجموع خودروهای حاشیه‌ای را y می‌نامیم. اگر مجموع ظرفیت همه تقاطع‌ها را حساب کنیم، طبق تقارن در این مجموع ضریب تعداد خودروهای هر خیابان مرکزی محله برابر با $\frac{7}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$ و ضریب تعداد خودروهای هر خیابان حاشیه‌ای برابر با $\frac{5}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$ می‌شود در نتیجه $66 = 6\left(\frac{5}{6}y + \frac{5}{12}x + y\right) + 90$. با حل معادله به دست می‌آید $54 = 36 - x$ و این همه‌چیزی است که ما راجع به تعداد خودروهای پارک شده می‌دانیم. در مرکز محله ۴ خیابان وجود دارد پس طبق اصل لانه کبوتری خیابانی وجود دارد که حداقل $9 = \lceil \frac{36}{4} \rceil$ خودرو در آن پارک شده باشد پس گزینه ۴ صحیح است. اما ممکن است در هر کدام از این ۴ خیابان دقیقاً ۹ خودرو پارک شده باشد پس گزینه ۳ صحیح نیست. گزینه ۲ نیز صحیح نیست زیرا ما فقط می‌دانیم مجموع خودروهای پارک شده در حاشیه محله ۵۴ است و ممکن است در یکی از خیابان‌های آن هیچ خودرویی وجود نداشته باشد. در نهایت گزینه ۱ نیز رد می‌شود زیرا ممکن است در هر یک از دو خیابان متصل به تقاطع بالا چهار خودرو پارک شده باشند پس ظرفیت آن تقاطع ۲۷ می‌شود اما ظرفیت تقاطع مرکزی محله هم‌واره ۹ است.

آکادمی آموزشی تیزلاین



۲۲. در مسابقه قوی‌ترین مردان ایران ۱۰ خانه دور یک دایره قرار دارد که در هر خانه ۲۰۰ وزنه از همه وزنه‌های ۱، ۲، ... و ۲۰۰ کیلوگرمی وجود دارد. ابتدا مردی در خانه‌ای قرار دارد، با شروع مسابقه از آن خانه وزنه ۱ کیلوگرمی را برداشت و در جهت عقربه‌های ساعت حرکت کرده ۱ خانه به جلو می‌رود، وزنه را در آنجا قرار داده و از آن خانه وزنه ۲ کیلوگرمی را برداشت و ۲ خانه به عقب (پادساعت‌گرد) آمده و وزنه را در آن قرار می‌دهد، سپس از آنجا وزنه ۳ کیلوگرمی را برداشت و ۳ خانه در جهت ساعت‌گرد می‌رود و همین روند ادامه می‌یابد. پس از آنکه وزنه ۲۰۰ کیلوگرمی را جابه‌جا کرد در خانه‌ای که کار خود را از آنجا شروع کرده بود مجموعاً چند کیلوگرم وزنه وجود دارد؟

(۱) ۲۰۲۸۰ (۲) ۲۰۲۰۰ (۳) ۲۰۱۸۰ (۴) ۲۰۱۰۰ (۵) ۲۰۰۸۰

پاسخ: گزینه ۱ درست است.

خانه ابتدایی را با صفر نشان می‌دهیم و خانه‌های دیگر را در جهت عقربه‌های ساعت به ترتیب با ۱ تا ۹ شماره‌گذاری می‌کنیم. با استفاده از استقرای می‌توان به سادگی نتیجه گرفت برای هر $i \leq 10$ وزنه $2i$ از خانه i به خانه $i - 1$ و وزنه $1 - 2i$ از خانه $i - 1$ به خانه i می‌رود (شماره خانه‌ها را به پیمانه ۱۰ در نظر می‌گیریم). پس وزنه $2i$ در خانه صفر بوده است اگر و تنها اگر $i = 10$ و از آن جا که $i = 10$ به خانه صفر نیز برمی‌گردد. برای وزنه‌های فرد نیز می‌توان استدلال مشابهی را انجام داد و نتیجه گرفت اگر $i = 10$ وزنه $1 - 2i$ از خانه صفر خارج شده است و اگر $i = 10$ به خانه صفر وارد شده است. مجموع وزنه‌هایی که در ابتدای کار در هر خانه وجود دارد برابر است با

$$1 + 2 + \dots + 200 = 20100.$$

حالا اختلاف وزنه‌هایی که از خانه صفر خارج یا وارد شده‌اند را محاسبه می‌کنیم:

$$\sum_{i=1}^{10} (2 \times (10i) - 1) - \sum_{i=0}^9 (2 \times (10i + 1) - 1) = 199 - 1 + \sum_{i=1}^9 -2 = 180$$

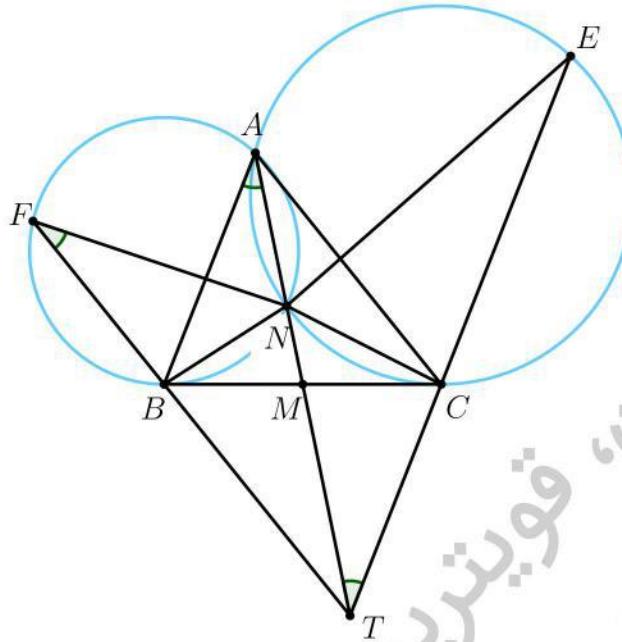
پس پاسخ برابر است با ۲۰۲۸۰.

۲۳. مثلث ABC مفروض است. فرض کنید ω_B و ω_C به ترتیب دو دایره گذرنده از A باشند به طوری که به ترتیب در B و C بر BC مماس باشند و N و A محل برخورد دو دایره مذکور باشند. از هر کدام از نقاط B و C خطی موازی با ضلع روبرویش رسم می‌کنیم و محل برخورد این دو خط را T نام‌گذاری می‌کنیم. گیریم خطوط TB و TC به ترتیب دایره‌های محیطی مثلث‌های ANC و ANB را برای بار دوم در E و F قطع کنند. اگر $AN = 6$ و $BC = 8$ ، حاصل $NF \times NE = ?$ کدام است؟

(۱) ۶۴ (۲) ۸۱ (۳) ۱۰۰ (۴) ۱۵۰ (۵) ۲۰۰

پاسخ: گزینه ۳ درست است.

آکادمی آموزشی تیزلاین



محل برخورد AN و BC را M می‌نامیم. طبق قوت M نسبت به دو دایره می‌توان نوشت

$$MB^2 = MN \cdot MA = MC^2 \Rightarrow MB = MC$$

پس M وسط BC است همچنین $ACTB$ متوازی‌الاضلاع است پس AT هم از M می‌گذرد و چهار نقطه روی یک خط قرار دارند. حالا می‌توان نوشت A, N, M, T

$$\angle BFN = \angle BAN = \angle BAT = \angle CTN$$

به طور مشابه می‌توان به دست آورد $\angle NET = \angle NTF$ در نتیجه

$$\triangle TNF \sim \triangle TEN \Rightarrow \frac{NE}{NT} = \frac{NT}{NF} \Rightarrow NE \times NF = NT^2$$

پس کافی است طول NT را محاسبه کنیم. باز هم طبق قوت M داریم

$$16 = MB^2 = MN \cdot MA = MN(MN + 6) \Rightarrow (MN - 2)(MN + 8) = 0 \Rightarrow MN = 2$$

در نهایت به دست می‌آید

$$TN = TM + 2 = AM + 2 = AN + 4 = 10 \Rightarrow NE \times NF = NT^2 = 100.$$

■

۲۴. در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ داریم $AB = 2AE$ و $\angle ABC = 60^\circ$. E را نقطه‌ای روی AB بگیرید که به علاوه F را هم قرینه E نسبت به مرکز متوازی‌الاضلاع فرض کنید. اگر CE و BF بر هم عمود باشند، نسبت ضلع کوچک‌تر به ضلع بزرگ‌تر متوازی‌الاضلاع به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟

آکادمی آموزشی تیز لاین

۰/۶ (۵)

۰/۵ (۴)

۰/۴ (۳)

۰/۳ (۲)

۰/۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۵ درست است.

لم. در مثلث ABC اگر وسط BC را M بنامیم داریم

$$AM^2 = \frac{1}{4} (2AB^2 + 2AC^2 - BC^2).$$

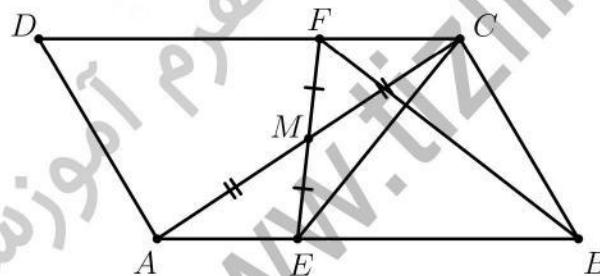
اثبات. قرینه A نسبت به M را A' می‌نامیم. واضح است که $ABA'C$ متوازی‌الاضلاع است. طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABC می‌توان نوشت

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \angle A \implies 2AB \cdot AC \cos \angle A = AB^2 + AC^2 - BC^2 \quad (1)$$

با هم از قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABA' به دست می‌آید

$$\begin{aligned} A'A^2 &= AB^2 + A'B^2 - 2AB \cdot A'B \cos(180^\circ - \angle A) \\ &\stackrel{(1)}{=} AB^2 + AC^2 + (AB^2 + AC^2 - BC^2) = 2AB^2 + 2AC^2 - BC^2 \end{aligned}$$

و نهایتاً از آن جا که $A'A = 2AM$ حکم لم نتیجه می‌شود. \square



حالا به مسئله اصلی باز می‌گردیم. قرار می‌دهیم $a = AB$, $b = BC$ و مرکز متوازی‌الاضلاع را M می‌نامیم. طبق فرض سوال $BF \perp CE$ و با استفاده از قضیه فیثاغورس به سادگی نتیجه می‌شود

$$EF^2 - FC^2 = BE^2 - BC^2 \implies 4EM^2 - \frac{1}{9}a^2 = \frac{4}{9}a^2 - b^2 \quad (2)$$

طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث‌های EBC و AEC و لم در مثلث ABC می‌توان نوشت

$$EC^2 = BE^2 + BC^2 - 2BC \cdot BE \cos 60^\circ = \frac{4}{9}a^2 + b^2 - \frac{2}{3}ab \quad (3)$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \cdot AB \cos 60^\circ = a^2 + b^2 - ab \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \stackrel{(3),(4)}{\implies} 4EM^2 &= 2AE^2 + 2EC^2 - AC^2 = \frac{2}{9}a^2 + \frac{8}{9}a^2 + 2b^2 - \frac{4}{3}ab - a^2 - b^2 + ab \\ &= \frac{1}{9}a^2 + b^2 - \frac{1}{3}ab \end{aligned}$$

$$\stackrel{(2)}{\implies} b^2 - \frac{1}{3}ab = \frac{4}{9}a^2 - b^2 \implies 18\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 3\left(\frac{b}{a}\right) - 4 = 0$$

آکادمی آموزشی تیزلاین



با حل معادله آخر نتیجه می‌شود که $\frac{b}{a} = 0, 56205 \dots$

۲۵. بزرگ‌ترین عدد حقیقی و ثابت k را بیابید به طوری که برای تمام اعداد حقیقی a, b, c, d, e

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2 + (d - e)^2 + (e - a)^2 \geq k(b - d)^2$$

۵ (۵)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۵ درست است.

در تمام راه حل از این نکته استفاده می‌کنیم که یک چندجمله‌ای درجه دو همواره نامنفی است اگر و تنها اگر دلتای آن نامثبت باشد. در هر مرحله عبارت را به صورت یک عبارت درجه دو بر حسب یکی از متغیرها می‌نویسیم و از نکته گفته شده استفاده می‌کنیم. همه عبارات را به طرف بزرگ‌تر تساوی می‌بریم و بر حسب c می‌نویسیم:

$$2c^2 - 2c(b+d) + (2a^2 + (2-k)b^2 + (2-k)d^2 + 2e^2 - 2ab - 2de = 2ea + 2kbd) \geq 0.$$

حالا بر حسب c به عبارت بالا نگاه می‌کنیم و دلتا را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 0 \geq \frac{\Delta_c}{4} = -4a^2 - (3 - 2k)b^2 - (3 - 2k)d^2 - 4e^2 + 4ab + 4de + 4ea - (4k - 2)bd \\ &\Leftrightarrow 4a^2 - 4a(b+e) + ((3 - 2k)b^2 + (3 - 2k)d^2 + 4e^2 - 4de + (4k - 2)bd) \geq 0. \\ &\Leftrightarrow 0 \geq \frac{\Delta_a}{16} = -3e^2 - (2 - 2k)b^2 - (3 - 2k)d^2 + 4de - (4k - 2)bd + 2be \\ &\Leftrightarrow 3e^2 - 2e(b+2d) + ((2 - 2k)b^2 + (3 - 2k)d^2 - (4k - 2)bd) \geq 0. \\ &\Leftrightarrow 0 \geq \frac{\Delta_e}{4} = -(5 - 6k)b^2 - (5 - 6k)d^2 + (10 - 12k)bd = -(5 - 6k)(b-d)^2 \\ &\Leftrightarrow k \leq \frac{5}{6} \end{aligned}$$



۲۶. برای زیرمجموعه ناتهی A از نقاط صفحه و عدد حقیقی r ، مجموعه نقاطی که از دست کم یک نقطه فاصله‌ای کمتر یا مساوی r دارند را با A_r نشان می‌دهیم. چند تا از گزاره‌های زیر درست هستند؟ (در همه موارد r و s اعداد حقیقی مثبت و A و B زیرمجموعه‌هایی از صفحه هستند).

$$(A_r)_s = (A_s)_r \bullet$$

$$B \subset A_r \text{ و تنها اگر } A \subset B_r \bullet$$

$$A \subset B \text{ هر } t > 0 \text{ آن‌گاه } A_t \subset B_t \bullet$$

$$(A \cup B)_r = A_r \cup B_r \bullet$$

آکادمی آموزشی تیزلاین

جاذبه اساتید بزرگهای کشوری تیزهوشان و کنکور

- اگر $A \cap B$ ناتهی باشد داریم $(A \cap B)_r = A_r \cap B_r$

(۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار (۵) پنج

پاسخ: گزینه ۲ درست است.

ابتدا برای گزاره‌های ۲، ۳ و ۵ مثال نقض ارائه می‌دهیم سپس گزاره‌های ۱ و ۴ را اثبات می‌کنیم. فرض کنید مجموعه A از یک نقطه a و مجموعه B از دو نقطه b, c تشکیل شده باشد که فاصله a, b برابر با r و فاصله a, c بیشتر از r باشد. واضح است که $c \notin A_r$ اما $A \subset B_r$ که $c \notin A$ پس گزاره ۲ درست نیست. برای رد کردن گزاره ۳ فرض کنید مجموعه A از یک نقطه a و مجموعه B از تمام نقاط صفحه به جز a تشکیل شده باشد. واضح است که شرط برقرار است اما $B \not\subset A$. در نهایت برای رد کردن گزاره ۵، فرض کنید مجموعه A از دو نقطه a, b و مجموعه B از دو نقطه a, c تشکیل شده باشد که فاصله a تا دو نقطه b, c بیشتر از r باشد و فاصله b, c برابر با r باشد. واضح است که $b \notin A_r \cap B_r$ اما $b \notin (A \cap B)_r$ پس $A \cap B = \{a\}$ پس فاصله آن حالا به سراغ اثبات گزاره ۴ می‌رویم. فرض کنید x عضوی از طرف چپ تساوی باشد. پس فاصله آن با یکی از اعضای $A \cup B$ مانند y کوچک‌تر یا مساوی r است. بدون کاسته شدن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم $y \in A$. در نتیجه $x \in A_r \cup B_r$ پس $x \in (A \cup B)_r \subseteq A_r \cup B_r$. به طور کاملاً مشابه می‌توان اثبات کرد $A_r \cup B_r \subseteq (A \cup B)_r$ پس دو مجموعه با هم برابرند. برای اثبات گزاره ۱، با استفاده از گزاره ۴ فقط کافی است تساوی را برای مجموعه A با یک عضو مانند a اثبات کنیم. نشان می‌دهیم $(A_r)_s = (A_r)$ دایره‌ای توپر به مرکز a و شعاع $r+s$ است. طبق نامساوی مثلث همه نقاط مجموعه فاصله کوچک‌تر یا مساوی از a دارند. همچنین فرض کنید نقطه‌ای مانند b داشته باشیم که فاصله اش از a کوچک‌تر یا مساوی $r+s$ باشد. اگر این فاصله کوچک‌تر یا مساوی r باشد واضح است که $b \in A_r$ و حکم نتیجه می‌شود. در غیر این صورت یک نقطه مانند c روی ab وجود دارد که فاصله a و c برابر با r باشد در نتیجه فاصله b و c کوچک‌تر یا مساوی s است پس $c \in (A_r)_s$ و نهایتاً حکم طبق تقارن نتیجه می‌شود. ■

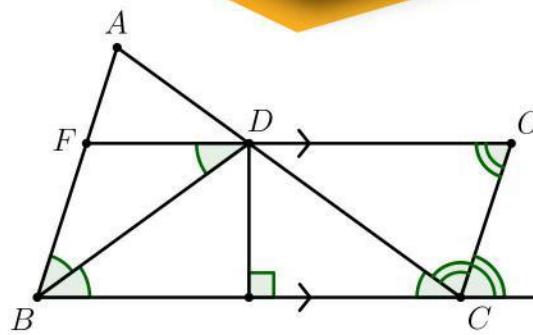
۲۷. در مثلث ABC داریم $\angle B = 2\angle C$ در نقطه D در ضلع BC با ضلع AC بخورد می‌کند و عمودمنصف BD در نقطه F با ضلع AB تقاطع دارد. دایره‌ای که مرکز آن روی خط FD است را خارج از مثلث در نظر می‌گیریم که بر ضلع AC و امتداد ضلع BC مماس شود. اگر مساحت مثلث ABC نه برابر مساحت مثلث AFD باشد و $FO = 4$ شعاع دایره چه قدر می‌شود؟

(۱) $2 - \sqrt{3}$ (۲) $3\sqrt{3}$ (۳) $3 - \sqrt{2}$ (۴) $3\sqrt{2}$ (۵) $2\sqrt{6}$

پاسخ: گزینه ۱ درست است.

آکادمی آموزشی تیزلاین

با حضور اساتید بزرگده کشوری تیزهوشان و کنکور



قرار می‌دهیم $\angle DBC = \angle C$. طبق فرض سوال $a = BC, b = AC$ می‌توان نوشت

$$\angle FDB = \angle FBD = \angle B - \angle DBC = 2\angle C - \angle DBC = \angle DBC$$

پس $FD \parallel BC$. از قضیه تالس به دست می‌آید

$$\frac{FD}{a} = \frac{AD}{b} = \sqrt{\frac{S_{ADF}}{S_{ACB}}} = \frac{1}{3} \Rightarrow CD = \frac{2}{3}b, FD = \frac{1}{3}a \quad (1)$$

واضح است که

$$\triangle FDB \sim \triangle DCB \Rightarrow \frac{BD}{a} = \frac{FD}{CD} \stackrel{(1)}{=} \frac{4}{9}b^2 = \frac{1}{3}a^2$$

در نتیجه $\frac{4}{9}a^2 = b$. از طرف دیگر دقت کنید که O روی نیمساز خارجی راس C است پس

$$\angle DCO = 180^\circ - \angle OCB = \angle DOC \Rightarrow DO = DC$$

$$\Rightarrow 4 = FO = FD + DO = \frac{1}{3}a + DC = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b = \frac{\sqrt{3} + 1}{3}a$$

$$\Rightarrow a = 6(\sqrt{3} - 1), b = 3(3 - \sqrt{3})$$

در نهایت واضح است که شعاع دایره همان فاصله O از BC است و از آنجا که $FO \parallel BC$ این فاصله همان فاصله D از BC است. طبق قضیه فیثاغورس این فاصله برابر است با

$$\sqrt{CD^2 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{\frac{4}{9}b^2 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{3(\sqrt{3} - 1)^2} = 3 - \sqrt{3}.$$

۲۸. فرض کنید x, y, z اعداد حقیقی مثبت باشند به گونه‌ای که $xy + yz + zx = 12321$ و $x + y + z = 222$ آن‌گاه بیشترین مقدار ممکن برای $A = \min \{xy, yz, zx\}$ چند است؟

۱۳۶۹ (۵)

۱۶۰۲ (۴)

۲۴۱۲ (۳)

۴۱۰۷ (۲)

۵۴۷۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۵ درست است.

آکادمی آموزشی تیزلاین

فرض می‌کنیم $A = xy$ پس $z = \max\{x, y, z\}$ بودست آوریم

$$(x+y+z)^2 = 4(xy+yz+zx) \implies z^2 - 2z(x+y) + (x-y)^2 = 0 \\ \implies z = x+y \pm \sqrt{(x+y)^2 - (x-y)^2} = x+y \pm 2\sqrt{xy} = (\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2$$

از آن جا که z از x, y بیشتر است باید داشته باشیم

$$z = x+y+2\sqrt{xy} \implies 222 = x+y+z = 2(x+y+\sqrt{xy}) \implies x+y+\sqrt{xy} = 111$$

طبق نامساوی حسابی-هندسی می‌توانیم بنویسیم

$$111 = x+y+\sqrt{xy} \geq 2\sqrt{xy} + \sqrt{xy} = 3\sqrt{xy} \implies xy \leq 1369.$$

حالت تساوی نیز زمانی رخ می‌دهد که $x = y = 37$ و $z = 148$.

۲۹. زیرمجموعه‌ای از $\{0, 1, 2, \dots, 99\}$ مثل A را «تقریباً جمعی» می‌گوییم، هر گاه بیش از یک عضو داشته باشد و به علاوه برای هر دو عضو متمایز a و b از A ، باقی‌مانده تقسیم $a+b+1$ بر 100 نیز عضوی از A باشد. چند زیرمجموعه تقریباً جمعی وجود دارد؟

۲۰۰ (۵)

۱۵۵ (۴)

۱۴۸ (۳)

۹۹ (۲)

۴۹ (۱)

پاسخ: گزینه ۴ درست است.

باقی‌مانده تقسیم x بر 100 را با $(x \bmod 100)$ نشان می‌دهیم. ابتدا ثابت می‌کنیم هر زیرمجموعه تقریباً جمعی شامل ۹۹ است. فرض کنید a_{\min} و a_{\max} به ترتیب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو یک زیرمجموعه تقریباً جمعی باشند. اگر $a_{\max} \neq 99$ آن‌گاه

$$a_{\max} + a_{\min} + 1 \pmod{100}$$

یا بیش‌تر از a_{\max} است یا کم‌تر از a_{\min} که تناقص است پس $a_{\max} = 99$. به راحتی می‌توان بررسی کرد که تنها زیرمجموعه‌های تقریباً جمعی دو عضوی یا سه عضوی مجموعه‌های زیر هستند:

$$\{x, 99\} \quad \forall 0 \leq x \leq 98, \quad \{x, 98 - x, 99\} \quad \forall 0 \leq x \leq 48$$

حالا فرض می‌کنیم زیرمجموعه تقریباً جمعی $\{a_1, a_2, \dots, a_k, 99\}$ را داشته باشیم که $a_1 < a_2 < \dots < a_k < 99$ و $3 \leq i \leq k-1$. به سادگی به دست می‌آید برای هر $2 \leq i \leq k-1$

$$a_i + a_1 + 1 = a_{i+1}, \quad a_k + a_1 + 1 = 99.$$

با جمع زدن دو طرف همه این روابط به دست می‌آید

$$a_2 + (k-1)a_1 + (k-1) = 99. \tag{1}$$

آکادمی آموزشی تیزلاین

از طرف دیگر واضح است که $99 < a_2 + a_k + 1 < 100 + a_1$ پس تنها حالت ممکن این است که

$$a_2 + a_k + 1 = 100 + a_1$$

و با کم کردن دو طرف این تساوی از تساوی $a_k + a_1 + 1 = 99$ به دست می‌آید

$$a_1 - a_2 = -a_1 - 1 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} (k+1)a_1 = 99 - k \Rightarrow k+1 \mid 100, a_1 = \frac{100}{k+1} - 1$$

پس تعداد اعضای مجموعه باید عاملی از ۱۰۰ باشد و در این صورت نیز مجموعه به‌طور یکتا مشخص می‌شود. می‌توان بررسی کرد که همه مجموعه‌های به دست آمده تقریباً جمعی هستند و از آنجا که ۱۰۰، هفت عامل بزرگ‌تر از ۳ دارد، پاسخ برابر است با

$$99 + 49 + 7 = 155.$$

■

۳۰. وترهای AB و CD از دایره به در نقطه P خارج از دایره متقاطع‌اند که A بین B و C است و D و P است. می‌دانیم $AB = 3AP$. عمودهای وارد از C و D بر AB را به ترتیب H و H' و وسط پاره‌خط PB را M نامیم. اگر $\frac{DM}{CH'} = \sqrt{3}$ باشد، مقدار $\frac{CM}{\sqrt{CH}}$ چه قدر است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{2} (5)$$

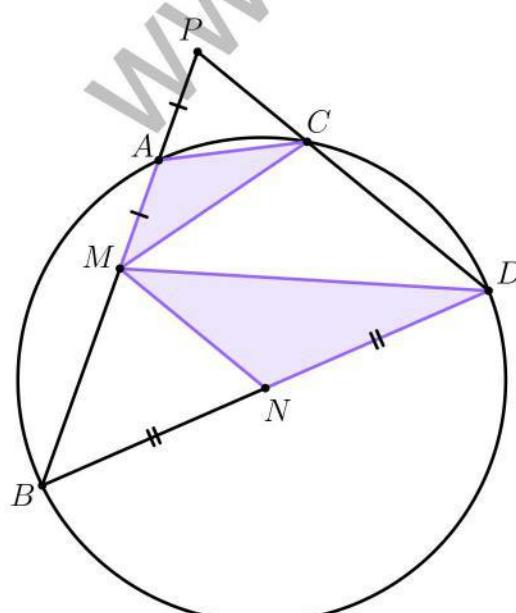
$$\sqrt{6} (4)$$

$$\sqrt{3} (3)$$

$$3\sqrt{3} (2)$$

$$2\sqrt{3} (1)$$

پاسخ: گزینه ۳ درست است.



آکادمی آموزشی تیزلاین

نشان می‌دهیم $\frac{CM}{\sqrt{CH}} = \frac{DM}{\sqrt{DH}}$. دقت کنید که

$$\frac{CH}{DH'} = \frac{S_{ACB}}{S_{ADB}} = \frac{AC \cdot CB \sin \angle ACB}{AD \cdot DB \sin \angle ADB} = \frac{AC \cdot CB}{AD \cdot DB}$$

پس کافیست ثابت کنیم

$$\frac{CM^r}{DM^r} = \frac{AC \cdot CB}{AD \cdot DB}. \quad (1)$$

می‌توان نشان داد (برای اثبات از A و B بر CD عمود کنید)

$$\frac{1}{4} = \frac{PA}{PB} = \frac{S_{CAD}}{S_{CBD}} = \frac{AC \cdot AD \sin \angle CAD}{BC \cdot BD \sin \angle CBD} = \frac{AC \cdot AD}{BC \cdot BD} \quad (2)$$

با ضرب دو طرف روابط (1) و (2) باید ثابت کنیم

$$\frac{AC^r}{BD^r} = \frac{CM^r}{4DM^r} \implies \frac{AC}{BD} = \frac{CM}{2DM}$$

وسط BD را N می‌نامیم پس حکم معادل می‌شود با $\frac{AC}{DN} = \frac{CM}{DM}$. برای اثبات حکم معادل تشابه دو مثلث CAM و DNA را نشان می‌دهیم. واضح است که

$$\angle MND = 180^\circ - \angle CDB = \angle CAM$$

پس کافیست نشان دهیم

$$\frac{AM}{AC} = \frac{MN}{ND} \iff \frac{AP}{AC} = \frac{PD}{BD}$$

رابطه آخر بنابر تشابه دو مثلث PAC و PDB بدست می‌آید پس حکم ثابت شد.



آکادمی تیز لاین

برگزار می کند:

دوره سالانه

بُخْفِيف و بِرَاه
بِرَا شِيزلايني ها

دکتر مینثم کوهگرد

کلاس آنلاین المپیاد
فیزیک (سطح یک)

پنجشنبه ها ۱۸:۱۰ تا ۱۹:۳۰
شروع از ۲۲ آبان

۵ جلسه
۶۰ هزار تومان

دکترا فشن به مرام

کلاس آنلاین المپیاد
ایاضی (سطح یک)

یکشنبه ها ۱۵:۲۰ تا ۲۱:۱۵
شروع از ۲۳ آبان

۵ جلسه
۶۰ هزار تومان

دکتر رضارحمت الهزاده

کلاس آنلاین المپیاد
شیمی (سطح یک)

شنبه ها ۱۵:۲۰ تا ۲۱:۱۵
شروع از ۲۲ آبان

۵ جلسه
۶۰ هزار تومان

دکتر قربانی

کلاس آنلاین المپیاد
زیست‌شناسی (سطح دو)

سه شنبه ها ۱۵:۲۰ تا ۲۱:۱۵
شروع از ۲۵ آبان

۲۰ جلسه
۸۰ هزار تومان

دکتر مینثم کوهگرد

کلاس آنلاین المپیاد
فیزیک (سطح دو)

پنجشنبه ها ۱۵:۲۰ تا ۲۱:۱۵
شروع از ۲۷ آبان

۲۰ جلسه
۸۰ هزار تومان

دکتر قربانی

کلاس آنلاین المپیاد
زیست‌شناسی (سطح یک)

سه شنبه ها ۱۵:۲۰ تا ۱۸:۳۰
شروع از ۲۵ آبان

۵ جلسه
۶۰ هزار تومان



ثبت نام در سایت رسمی



tizline.ir



www.tizline.ir

۰۲۱-۹۱۳۰۲۰۰۲

۰۹۳۳-۳۸۴۰۲۰۲



آکادمی آموزشی تیز لاین

با حضور استاد بزرگیه کشوری تیز هوشان و کنکور

تقویم آموزشی آکادمی تیز لاین

سال ۱۴۰۱-۱۴۰۰

#تیزلاین_شو

ترم دو
دوره سالانه

آغاز ثبت نام: ۱ دی
شروع دوره: ابهمن
پایان دوره: ۲۵ اردیبهشت

۱۵ جلسه

ترم یک
دوره سالانه

آغاز ثبت نام: شهریور
شروع دوره: ۱۰ مهر
پایان دوره: ۱۸ دی

۱۵ جلسه

ترم
تابستان

آغاز ثبت نام: ۱۰ خرداد
شروع دوره: ۱۲ تیر
پایان دوره: ۲۰ شهریور
۱۰ جلسه

آنلاین تخصص ماست

کلاس، آزمون، مشاوره، تکلیف

ثبت نام در سایت رسمی آکادمی تیز لاین www.Tizline.ir

آزمون های هماهنگ از ۲۵ مهر تا ۱۱ اردیبهشت

@mathmovie6

@Tizline.ir