آکادمی آنلاین تیز لاین

قوی ترین پلتفرم آموزشی تیزهوشان

- برگزار کننده کلاس های آنلاین و حضوری تیزهوشان و المپیاد از پایه چهارم تا دوازدهم
- آزمون های آنلاین و حضوری
- مشاوره تخصصی

با اسکن QR کد روبرو وارد صفحه اینستاگرام آکادمی تیزلاین شو و از محتواهای آموزشی رایگان لذت ببر

TIZLINE.IR

برای ورود به صفحه اصلی سایت آکادمی تیزلاین کلیک کنید

برای دانلود دفترچه آزمون های مختلف برای هر پایه کلیک کنید

برای مطالعه مقالات بروز آکادمی تیزلاین کلیک کنید

www.Tizline.ir ۰۲۱ ۴۴۱۳ ۶۹۷۵ ۰۹۳۳ ۳۸۴ ۰۲۰۲ ۵۰۰۰۲۶۹۱۳۲۴

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور

دانش‌آموز عزیز، سؤال‌های این آزمون به دو شکل پنج‌گزینه‌ای و پاسخ‌کوتاه است. پاسخ درست به هر دو نوع سؤال ۴ نمرهٔ مثبت دارد. پاسخ غلط به هر سؤال پنج‌گزینه‌ای ۱ نمرهٔ منفی دارد ولی پاسخ غلط به سؤال‌های پاسخ‌کوتاه نمرهٔ منفی ندارد. پاسخ‌نامه در مورد هر دو نوع سؤال مشابه و شامل پنج مکان خالی است که در هر کدام می‌توانید یک رقم از ارقام صفر تا نه را بنویسید.

جواب سؤال‌های پاسخ‌کوتاه، عددی نامنفی و کم‌تر از ۱۰۰۰۰۰ است. شما باید ارقام قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ‌نامه بنویسید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵۰٫۷۳ بود شما باید در مقابل شمارهٔ سؤال در پاسخ‌نامه، چنین چیزی بنویسید:

	۶	۹	۵	۰

در مورد سؤال‌های پنج‌گزینه‌ای شمارهٔ گزینهٔ درست را در مستطیل سمت راست بنویسید. مثلاً اگر گزینهٔ شمارهٔ ۳ درست است باید در مقابل شمارهٔ سؤال در پاسخ‌نامه، چنین چیزی بنویسید:

				۳

لازم نیست کاملاً شبیه نمونه‌های بالا بنویسید؛ حتی نوشتن رقم ۶ به شکل «٦» هم ایرادی ندارد ولی رقم صفر را کوچک و رقم پنج را بزرگ بنویسید تا با هم اشتباه نشوند و به‌علاوه به هیچ‌وجه از ارقام انگلیسی استفاده نکنید. با رنگ سیاه یا آبی، خوانا و پررنگ بنویسید. هر یک از ارقام را داخل یک کادر بنویسید. اگر از مداد استفاده کنید، پاک کردن برایتان مقدور است ولی از مداد اتود، که اثر آن کم‌رنگ و نازک است، استفاده نکنید.

۱. مأمور آمار، یک سرشماری در شکرستان انجام داده است. فراوانی نسبی تعداد خانواده‌ها به صورت زیر است:

تعداد اعضای خانواده	۲	۳	۴	۵	۶
درصد	۱۰	۳۰	۳۰	۱۰	۲۰

چند درصد از مردم، در خانواده‌های ۲ نفری زندگی می‌کنند؟

۲. کم‌ترین مقدار $\frac{a^۲}{b}$ در مجموعهٔ زیر چند است؟

$$\left\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}, (a+۱)(b+۱) = ab, ۰ \leq b\right\}$$

۳. چند عدد چهار رقمی با ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ وجود دارد که هیچ‌کدام از رقم‌های آن تکرار نشده باشد و مجموع هر دو رقم متوالی آن بر ۲ یا ۳ (یا هر دو) بخش‌پذیر باشد؟

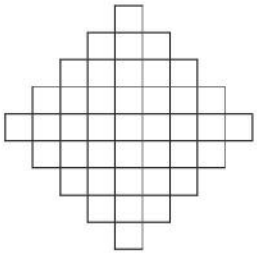
مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور

۴. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD$ طول ضلع AB برابر ۴ و طول دو ساقِ AD و BC برابر ۲ است. زاویهٔ $\angle ABC$ نیز برابر ۱۲۰° درجه است. اگر E محل برخورد دو قطر ذوزنقه باشد، نسبت $\frac{BE}{DE}$ برابر است با:

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}-۱$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۹}$ ۵) $\frac{۲}{۳}$

۵. تعدادی مُهر مربعی شکل با ابعاد ۱×۱، ۲×۲، ۳×۳، ۴×۴ و ۵×۵ به ما داده شده است. در هر مرحله می‌توانیم یک مُهر را آغشته به رنگ کرده و سپس با کوبیدن آن روی نقشهٔ روبه‌رو آن را رنگ کنیم به طوری که تمامی سطح مهر درون نقشه قرار گیرد. دست‌کم چند بار باید مُهر روی نقشه بکوبیم تا همهٔ جای نقشه رنگ شود؟ (ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است.)



۶. چند زوج مرتب (x,y) از اعداد حقیقی، در دستگاه معادلات زیر صدق می‌کند؟

$$\begin{cases} x^۲y + xy^۲ = ۳۰ \\ xy + x + y = ۱۱ \end{cases}$$

۷. در لحظه‌ای که ماهوارهٔ امید در ارتفاع ۲۵۶ کیلومتری از سطح زمین قرار داشته، فاصلهٔ ماهواره تا دورترین نقطهٔ روی زمین که می‌توانسته آن را ببیند چند کیلومتر بوده است؟ (زمین را کره‌ای به شعاع ۶۳۷۰ کیلومتر در نظر بگیرید.)

۸. چند چهارتایی (a,b,c,d) از اعداد طبیعی در رابطه‌های زیر صدق می‌کنند؟

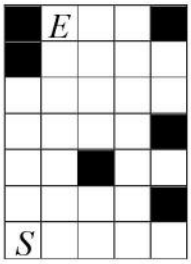
$$a^b = cd, \quad b^c = da, \quad c^d = ab, \quad d^a = bc.$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۸ ۵) بی‌نهایت

آکادمی تیزلاین، فوبیزی پلتفرم آموزشی تیزهوشان www.tizline.ir

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور



۹. در شکل روبه‌رو، مهره‌ای ابتدا در خانهٔ S قرار دارد و در هر قدم می‌توانیم آن را در یکی از جهت‌های بالا، چپ و راست یک خانه جابه‌جا کنیم، بدون این‌که از جدول خارج شود یا وارد خانه‌های سیاه‌رنگ شود. اگر بخواهیم از هیچ خانه‌ای بیش از یک مرتبه عبور نکنیم، به چند روش مختلف می‌توان مهره را به خانهٔ E رساند؟

۱۰. حداکثر چند عدد از میان اعداد طبیعی ۱ تا ۱۳۹۱ می‌توان انتخاب کرد که ضرب هر دوتایی از آن‌ها مربع کامل باشد؟

۱۱. برای دو عدد طبیعی a و b عمل $\hat{}$ به این صورت تعریف می‌شود: $a \hat{} b = a^b$. عمل $\otimes$ نیز به شکل زیر تعریف می‌شود

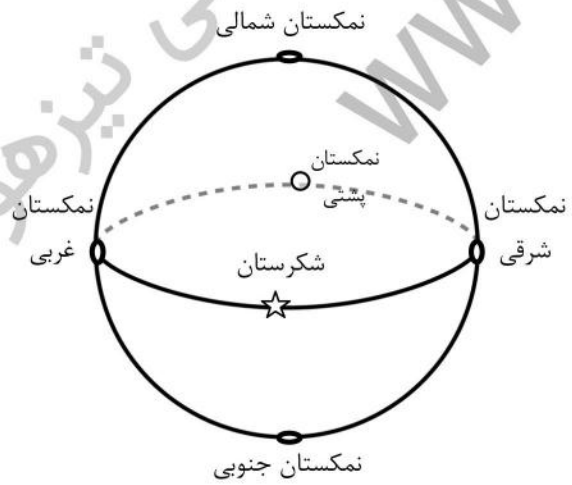
$$a \otimes b = (\cdots((a \hat{} a) \hat{} a) \hat{} \cdots \hat{} a)$$

که در عبارت سمت راست، a، b مرتبه ظاهر شده است. در این صورت $a \otimes b$ برابر است با:

۱) $a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}$ ۲) b^a ۳) a^{ab} ۴) $a^{a^{b-1}}$ ۵) ab^{b^a}

۱۲. در مثلث ABC، میانه‌های نظیر رأس B و رأس C بر هم عمود هستند. اگر طول اضلاع AB و AC به ترتیب ۱۹ و ۲۲ باشد. طول ضلع BC چه قدر است؟

۱۳. سلطان شکرستان در نظر دارد که یک تور جهان‌گردی بین شکرستان و ۵ شهر دیگر برقرار کند: نمکستان‌های شمالی، جنوبی، شرقی، غربی و پشتی! (در شکل، نمکستان پشتی، در پشت کره است!). هر شهر تنها به ۴ شهر نزدیکِ خود خط هوایی دارد. به چند صورت می‌توان توری طراحی کرد که ابتدا و انتهای آن شکرستان باشد و از شهرهای دیگر دقیقاً یک بار بگذرد؟



۱) ۱۶ ۲) ۲۰ ۳) ۳۲ ۴) ۴۰ ۵) ۴۸

آکادمی تیزلاین، قویترین پلتفرم آموزشی تیزهوشان www.tizline.ir

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور

۱۴. به تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$، تابعی n مقداری می‌گوییم اگر برد آن مجموعه‌ای n عضوی باشد. اگر f و g به ترتیب n و m مقداری باشند. توابع $f+g$، $f\times g$ و $f\circ g$، به ترتیب حداکثر چند مقداری هستند؟

۱) mn، mn و $\min(m,n)$.

۲) mn، $m+n$ و $\max(m,n)$.

۳) $m+n$، mn و n^m.

۴) $m+n$، mn و mn.

۵) $\max(m,n)$، mn و mn.

۱۵. در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ $ABCD$، ($\angle A=\angle D=90^\circ$)، M وسط ضلع BC است. فرض کنید دایره به مرکز M و شعاع MB، درونِ پاره خط AD را در X و Y قطع کند. اگر $AB=1$ و طول پاره‌خط‌های BC، CD و DA به ترتیب p، q و r باشد. طول پاره‌خط‌های AX و AY ریشه‌های کدام معادلهٔ زیر هستند؟

۱) x^2+px+q

۲) x^2-rx+q

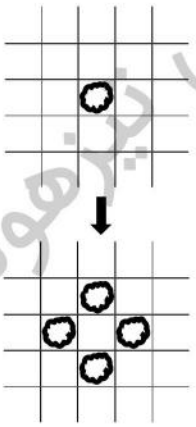
۳) x^2-px+q

۴) qx^2+rx+p

۵) px^2-qx+r

۱۶. جمع صورت و مخرج چند تا از کسرهای $\frac{1}{90},\frac{2}{90},\dots,\frac{90}{90}$، بعد از ساده کردن بر ۳ بخش‌پذیر است؟

۱۷. در خانه‌های یک شبکهٔ مربعی نامتناهی، گونه‌ای باکتری به نام «چارزا» زندگی می‌کند. در هر خانه هر تعداد چارزا می‌توانند هم‌زمان زندگی کنند. بعد از یک ساعت هر چارزا به چهار چارزا تقسیم شده و هرکدام به یکی از چهار خانهٔ مجاور می‌رود. اگر در ابتدا فقط یک چارزا وجود داشته باشد، بعد از شش ساعت چند چارزا در خانه‌ای است که با خانهٔ ابتدایی فقط یک رأس مشترک دارد؟ (به طور مثال پس از یک ساعت فقط در هر کدام از چهار خانهٔ مجاور خانهٔ آغازی، دقیقاً یک چارزا وجود خواهد داشت.)



۱۸. چند زیرمجموعهٔ چهار عضوی از اعداد حقیقی مثبت وجود دارد که ضرب دوبه‌دوی اعضای آن، برابر مجموعهٔ $\{2,8,9,32,36,144\}$ شود؟

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور

۱۹. تابع $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ این‌گونه تعریف شده است که $f(1)=1$ و برای $n>1$ اگر تجزیهٔ n به عوامل اول به صورت $n=p_1^{r_1}\cdots p_k^{r_k}$ باشد، آن‌گاه $f(n)=r_1^{p_1}\cdots r_k^{p_k}$. کدام درست است؟
(p_iها اعداد اول متمایزند و r_iها اعداد طبیعی هستند.)

۱) f پوشا است.

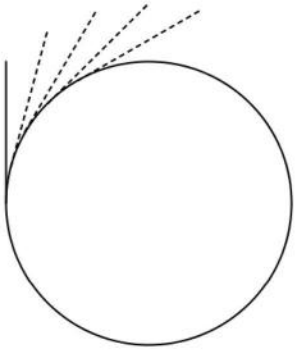
۲) f یک‌به‌یک است.

۳) اگر a و b عضو برد f باشند، آن‌گاه ab عضو برد f است.

۴) برای هر دو عدد طبیعی m و n، $f(m)f(n)\le f(mn)$.

۵) برای هر دو عدد طبیعی m و n، $f(m)f(n)\ge f(mn)$.

۲۰. چرخی به شعاع ده متر از مرکز به وسیلهٔ محوری به زمین متصل شده، طوری که می‌تواند آزادانه حول آن محور بچرخد. میله‌ای به طول ده متر به شکل مماس به چرخ متصل شده است. اگر چرخ 60° بچرخد، نزدیک‌ترین گزینه به مساحت نقطه‌هایی که این میله از روی آن‌ها عبور می‌کند، (بر حسب متر مربع) کدام است؟ (شکل وضعیت میله در ابتدا، انتها و سه لحظهٔ بینی را نشان می‌دهد.)



۱) ۲۰ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۵۰ ۵) ۶۰

۲۱. دنبالهٔ $\{a_n\}$ با دو عدد حقیقی دل‌خواه a_1 و a_2 شروع می‌شود و جمله‌های بعدی آن از رابطهٔ $a_{n+2}=\max\{a_{n+1}-1, a_n+1\}$ به‌دست می‌آیند. اگر $a_{100}=100$، بیش‌ترین مقدار ممکن برای a_1 چند است؟

۲۲. احسان و حسام در جدولی 2×3 مطابق شکل، با هم مهره‌بازی می‌کنند. در این بازی هر کس در نوبت خودش می‌تواند یک مهره در یکی از خانه‌های خالی جدول قرار دهد یا یکی از مهره‌های موجود را به خانهٔ سمت راستش یا خانهٔ بالایش منتقل کند، البته اگر آن خانه خالی باشد. بازنده اولین کسی است که نتواند حرکتی انجام دهد. احسان برای شروع بازی در کدام‌یک از خانه‌های شماره‌گذاری‌شده، مهره را قرار دهد تا بتواند بازی را ببرد؟

	۱
۳	۲
۴	

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵) در هر کدام از این چهار حالت، حسام می‌تواند طوری بازی کند که برنده شود.

آکادمی تیزلاین: قویترین پلتفرم آموزشی تیزهوشان www.tizline.ir

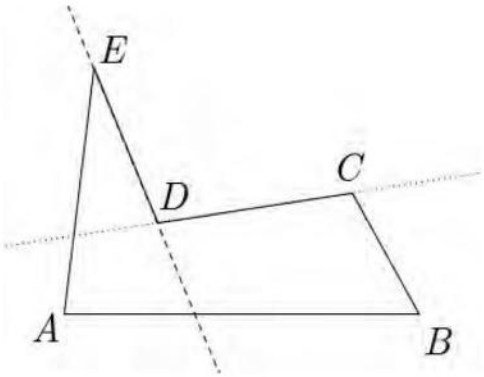
مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور

۲۳. تعداد جواب‌های معادلهٔ زیر در اعداد طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰، با شرط $x \leq y$ را بیابید.

$$x^{۲} + y^{۲} = xy(x,y) + [x,y].$$

منظور از (x,y)، بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک x و y و منظور از $[x,y]$ کوچک‌ترین مضرب مشترک x و y است.



۲۴. منظور از یک ضلعِ «ناجور» در یک چندضلعی که اضلاع آن یک‌دیگر را قطع نمی‌کنند، ضلعی است که دو ضلعِ مجاورش در دو طرف خط شامل آن قرار دارند. مثلاً در پنج‌ضلعی روبه‌رو تنها ضلع‌های CD و DE ناجور هستند. یک ۱۳۹۱ ضلعی حداکثر چند ضلع ناجور می‌تواند داشته باشد؟

۲۵. روی سطحِ کره‌ای، ۴ دایره رسم شده است. سطح این کره حداکثر به چند ناحیه تقسیم می‌شود؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶ ۵) ۱۷

آکادمی تیزلاین، بزرگترین پلتفرم آموزشی تیزهوشان www.tizline.ir

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور

۱- پاسخ : ۵ ؛ توجه کنید که در یک خانواده‌ی n نفری، n نفر زندگی می‌کنند! پس پاسخ سؤال این‌گونه محاسبه می‌شود:

$$\frac{2\times ۱۰}{۲\times ۱۰+۳\times ۳۰+۴\times ۳۰+۵\times ۱۰+۶\times ۲۰}=\frac{۲۰}{۴۰۰}=٪۵$$

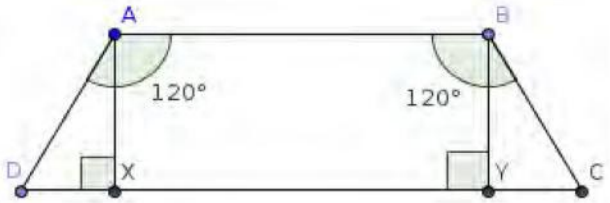
۲- پاسخ : ۴ ؛ $(a+۱)(b+۱)=ab \Rightarrow ab+a+b+۱=ab \Rightarrow a=-(b+۱)$ پس اکنون داریم که

$$\frac{a^۲}{b}=\frac{(b+۱)^۲}{b}=۲+b+\frac{۱}{b}$$

و با استفاده از نامساوی حسابی هندسی داریم: $۲+b+\frac{۱}{b}\geq ۲+۲\sqrt{b\times\frac{۱}{b}}=۴$ و این مقدار با قرار دادن $a=-۲$ و $b=۱$ به دست می‌آید.

۳- پاسخ : ۲ ؛ توجه کنید که عدد ۳ تنها می‌تواند کنار عدد ۱ قرار گیرد. عدد ۱ تنها می‌تواند کنار اعداد ۳ و ۲ قرار گیرد. عدد ۲ تنها می‌تواند کنار عددهای ۴و ۱ قرار گیرد و عدد ۴ تنها می‌تواند کنار عدد ۲ قرار گیرد. با این توضیحات اعداد ۳ و ۴ نمی‌توانند به عنوان رقم دوم یا سوم قرار گیرند، پس یکی از آن‌ها در جای‌گاه اول و دیگری در جای‌گاه چهارم است. اکنون با اندکی بررسی می‌فهمیم که در کل دو عدد خوب داریم: ۳۱۲۴ و ۴۲۱۳.

۴- پاسخ : ۵ ؛ عمود وارد از نقاط A و B بر خط CD را به ترتیب X و Y می‌نامیم. از آن‌جایی که در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع مقابل به زاویه‌ی ۳۰ درجه نصف وتر است، پس CY و DX برابر ۱ هستند. پس CD برابر ۱ + ۴ + ۱ = ۶ است. طبق قضیه‌ی تالس می‌دانیم $\frac{BE}{DE}=\frac{AB}{CD}$ پس مقدار خواسته‌شده برابر $\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}$ است.

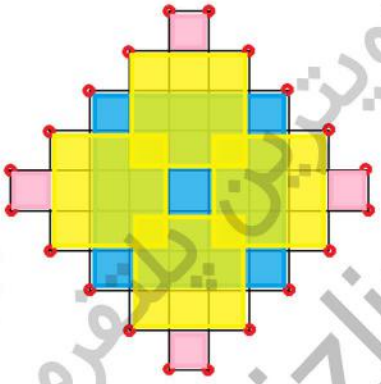


آکادمی تیزلاین، قویترین پلتفرم آموزشی تیزهوشان www.tizline.ir

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور

۵- پاسخ : ۹ ؛ گوشه‌های تیز شکل(نقاط قرمز) را در نظر بگیرید. تعداد این گوشه‌ها ۲۰ تا است و پس از پوشانده شدن شکل، این گوشه‌ها، توسط رئوس مهرها پوشانده می‌شوند. توجه کنید که به جز مهر مربعی ۵×۵ که می‌تواند ۴ تا گوشه را بپوشاند، دیگر مهرها حداکثر می‌توانند ۲ گوشه را بپوشانند. همچنین استفاده‌ی بیش از یک بار مهر ۵×۵ موجب رنگی شدن خانه‌ی بار از مهرها استفاده کنیم nجدیدی نمی‌گردد(چون تنها یک راه برای قرار دادن یک مهر ۵×۵ در جدول داریم). پس اگر حداقل ۹ است. در n بیشتر نیست. این مقدار باید حداقل ۲۰ باشد، پس $۴ + ۲(n - ۱)$تعداد گوشه‌های پوشانده شده از شکل می‌بینیم که ۹ مهر برای این کار کافی نیز هست.



۶- پاسخ : ۴ ؛ توجه کنید که $y \neq -۱$ زیرا در غیر این صورت با توجه به عبارت دوم نتیجه می‌گیریم که $-۱ = ۱۱$. اکنون با استفاده از عبارت دوم، داریم که: $(x+۱)(y+۱) = ۱۲ \Rightarrow x = \frac{۱۲}{y+۱} - ۱ = \frac{۱۱-y}{y+۱}$ با جای‌گذاری x در عبارت اول داریم :

$$\left(\frac{۱۱-y}{y+۱}\right)^۲ y + \frac{۱۱-y}{y+۱} y^۲ = ۳۰ \Rightarrow \frac{۱۱-y}{y+۱} y \left(\frac{۱۱-y}{y+۱} + y\right) = ۳۰ \Rightarrow \left(\frac{۱۱-y}{y+۱}\right) y \left(\frac{۱۱+y^۲}{y+۱}\right) = ۳۰$$

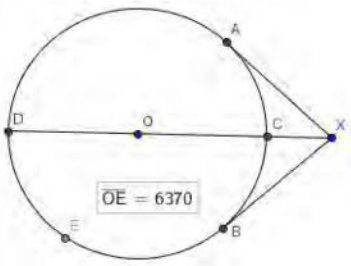
$$\Rightarrow (۱۱-y)(۱۱+y^۲)y = ۳۰(y+۱)^۲ \Rightarrow ۱۲۱y - ۱۱y^۲ + ۱۱y^۳ - y^۴ = ۳۰y^۲ + ۶۰y + ۳۰$$

$$\Rightarrow y^۴ - ۱۱y^۳ + ۴۱y^۲ - ۶۱y + ۳۰ = ۰$$

ریشه‌های چندجمله‌ای به دست آمده برابر ۱، ۲، ۳ و ۵ است. پس ۴ جواب داریم.

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور



۷- پاسخ : 1824 ؛ می‌توان صورت سؤال را مانند شکل زیر تفسیر کرد. پس از صورت سؤال داریم که : $XC = ۲۵۶ , OC = OD = ۶۳۷۰$ و سؤال از ما طول XA را می‌خواهد. طبق رابطه‌ی قوت نقطه‌ی X داریم:

$$XA^۲ = XC.XD = ۲۵۶ \times \left(۲ \times ۶۳۷۰ + ۲۵۶\right)$$ پس $XA = ۱۸۲۴$.

۸- پاسخ : ۲ ؛ اگر یکی از a یا b یا c یا d برابر یک باشد، تمام اعداد یک هستند و این خود یک جواب برای مسئله است. اکنون به دنبال دیگر جواب‌ها هستیم پس فرض می‌کنیم این اعداد همگی بزرگ‌تر مساوی ۲ اند. از ضرب سه رابطه داریم: $a^b b^c c^d d^a = a^۲ b^۲ c^۲ d^۲$ ولی چون فرض کردیم همه‌ی چهار عدد مسئله بزرگ‌تر مساوی ۲ هستند خواهیم داشت: $a^b b^c c^d d^a \geq a^۲ b^۲ c^۲ d^۲$. پس اکنون حالت تساوی رخ داده‌است و در نتیجه تمام اعداد ۲ هستند. این نیز یک جواب درست است. پس در کل ۲ جواب داریم.

۹- پاسخ : ۹۶۰ ؛ از خانه‌های سطر بالایی شروع می‌کنیم و روی هر خانه تعداد راه‌های رسیدن به خانه‌ی E را با شروع حرکت از آن خانه می‌نویسیم. همین کار را برای سطرهای پایینی هم انجام می‌دهیم. اگر برای خانه‌ی X، خانه‌هایی از سطر بالایی را در نظر بگیریم که می‌توان از X به آن‌ها رفت، طبق اصل جمع تعداد راه‌های رسیدن از X به E(با شروع حرکت از خود خانه‌ی X) برابر مجموع تعداد راه‌های رسیدن از خانه‌های بالایی آن خانه به E است. پس شکل زیر به دست می‌آید و جواب ۹۶۰ است.

	E:۱	۱	۱	
	۳	۳	۳	۳
۱۲	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۴۸	۴۸	۴۸	۴۸	
۹۶	۹۶		۴۸	۴۸
۲۴۰	۲۴۰	۲۴۰	۲۴۰	
S:۹۶۰	۹۶۰	۹۶۰	۹۶۰	۹۶۰

آکادمی تیزلاین، قویترین پلتفرم آموزشی تیزهوشان
www.tizline.ir

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور

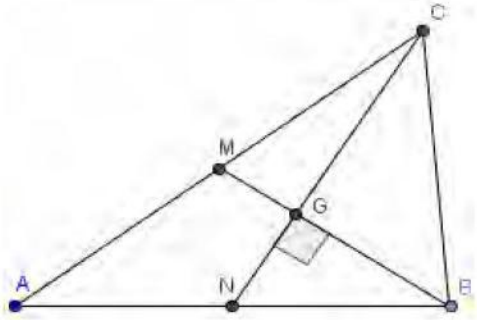
مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

۱۰- پاسخ : ۳۷ ؛ فرض کنید که $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \cdots < a_n$ اعدادی باشند که ویژگی سوال را دارا هستند و فرض کنید $a_1 = Xb_1^2$. که X عددی خالی از مربع(یعنی بر هیچ مربع کاملی بخش‌پذیر نیست) است. اکنون توجه کنید که طبق ادعای سؤال می‌توان نتیجه گرفت که برای هر $i \geq 2$: $a_i = X \times b_i^2$. و چون b_iها اعداد متمایز بزرگ‌تر از ۱ و کوچک‌تر مساوی $\sqrt{1391}$ هستند پس تعداد کل اعداد حداکثر $\left\lfloor \sqrt{1391} \right\rfloor = 37$ است. حال توجه کنید که ۳۷ عدد 1^2 و 2^2 و ... و 37^2 در شرایط سوال صدق می‌کنند. پس جواب سوال ۳۷ است.

۱۱- پاسخ : ۴ ؛ کافی است توجه کنید که $(x^y)^z = x^{y \times z}$ پس به سادگی و با استقرا می‌توان نشان داد که مقدار مورد نظر برابر $a^{a^{b-1}}$ است.

۱۲- پاسخ : ۱۳ ؛ با توجه به این که میانه‌ها یکدیگر را به نسبت یک به دو قطع می‌کنند، دو مثلث MGN و BGC با نسبت یک به دو متشابه اند پس $MN = \frac{BC}{2}$. حال با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:

حال با جایگذاری مقادیر MC و NB داریم: $MC^2 + NB^2 = 11^2 + \left(\frac{19}{2}\right)^2 = \frac{484+361}{4} = \frac{845}{4}$ پس مقدار BC^2 برابر $\frac{4}{5} \times \frac{845}{4} = 169$ خواهد بود و بنابراین BC برابر ۱۳ است.



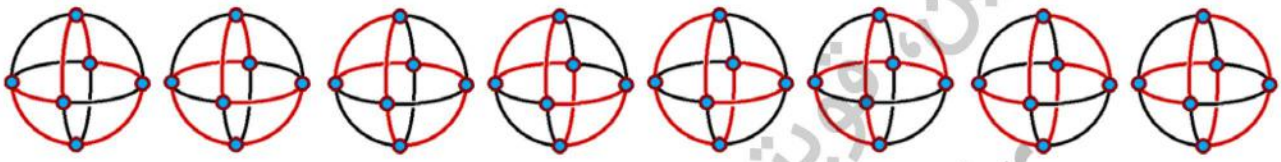
آکادمی تیزلاین، قویترین پلتفرم آموزشی تیزهوشان www.tizline.ir

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور

۱۳- پاسخ : ۳۲ ؛ به علت تقارنِ «نمکستان»ها، تعداد راه‌های رسیدن از «شکرستان» به «نمکستان شمالی» را حساب می‌کنیم و چهار برابر این عدد جواب مسأله خواهد بود. با حالت‌بندی کاملاً ساده به این نتیجه می‌رسیم که تمام راه‌های موجود دقیقاً ۸ راه (جهت‌دار) نمایش داده شده در شکل زیر هستند. پس ۳۲ حالت داریم.

(می‌توان برحسب این‌که نمکستان پشتی شهر چندم سفر است، حالت‌بندی را انجام داد.)



۱۴- پاسخ : ۱ ؛ فرض کنید برد f اعداد $a_1, a_2, \dots, a_n$ و برد g اعداد $b_1, b_2, \dots, b_n$ باشند. برد حاصل‌جمع حداکثر می‌تواند اعداد $a_i + b_j (i \le n, j \le m)$ باشد و مثال برای این حداکثر می‌تواند این‌گونه باشد: f تابعی است که به اعداد طبیعی، باقی‌مانده‌ی آن‌ها به n را اختصاص می‌دهد و به بقیه‌ی اعداد صفر می‌دهد. g تابعی است که به عدد طبیعی x ، nبرابر باقی‌مانده‌ی $\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$ در تقسیم بر m را اختصاص می‌دهد و به بقیه‌ی اعداد صفر می‌دهد. به سادگی می‌توان دید که mn عدد متمایز خواهیم داشت.

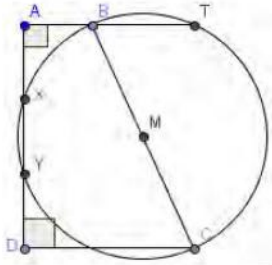
برد حاصل ضرب حداکثر می‌تواند اعداد $a_i \times b_j (i \le n, j \le m)$ باشد و مثال برای این حداکثر می‌تواند این‌گونه باشد: f تابعی است که به اعداد طبیعی دو به توان باقی‌مانده‌ی آن‌ها به n را اختصاص می‌دهد و به بقیه‌ی اعداد یک می‌دهد. g تابعی است که به عدد طبیعی x ، دو به توان n برابر باقی‌مانده‌ی $\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$ در تقسیم بر m را اختصاص می‌دهد و به بقیه‌ی اعداد یک می‌دهد. به همان سادگی می‌توان دید که این mn عدد نیز متمایز اند.

در مورد ترکیب توابع چون برد تابع f ، m عضوی است پس خروجی $f \circ g$ نیز حداکثر m عضو دارد. از طرفی چون تابع g حداکثر n خروجی دارد پس $f \circ g$ نیز نمی‌تواند بیش از n خروجی داشته باشد. پس حداکثر اعضای برد $\min\{m, n\}$ است. برای این حالت یک مثال می‌تواند این باشد که : f به اعداد ۱ تا n خودشان و به بقیه‌ی اعداد ۱ را نسبت می‌دهد. هم‌چنین g به اعداد ۱ تا m خودشان و به بقیه‌ی اعداد ۱ را نسبت می‌دهد. به سادگی می‌توان دید که این مثال حداکثر ادعا شده را می‌دهد. پس جواب گزینه‌ی ۱ است.

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور

۱۵- پاسخ : ۲ ؛ از رابطه‌ی قوت داریم: $AX \times AY = AB \times AT = ۱ \times DC = q$ از طرفی $AX = YD$ پس: $AX + AY = AY + YD = AD = r$ و چون $(x - AX)(x - AY) = x^۲ - (AX + AY)x + AX \times AY$ پس پاسخ سوال $x^۲ - rx + q$ است.



۱۶- پاسخ : ۳ ؛ دقت کنید که اگر تعداد عوامل ۳ در صورت و مخرج کسر متفاوت باشد، بعد از ساده کردن دقیقاً یکی از صورت و مخرج بر ۳ بخش‌پذیر است و دیگری نیست و در نتیجه حاصل جمع آن‌ها نمی‌تواند بر ۳ بخشپذیر باشد. پس تنها باید کسرهایی را بررسی کنیم که صورت آن‌ها دو عامل ۳ دارد. این کسرها بعد از ساده کردن به شکل $\frac{n}{۱۰}$ در می‌آید که n بر ۳ بخش‌پذیر نیست. دقت کنید که ضرب صورت و مخرج کسر در عددی که بر ۳ بخشپذیر نیست ویژگی مورد نظر را تغییر نمی‌دهد پس کافی است این کسرها بررسی شوند. با بررسی این کسرها می‌بینیم که تنها سه کسر $\frac{۲}{۱۰}$، $\frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۱۰}$ و $\frac{۴}{۵} = \frac{۸}{۱۰}$ این خاصیت را دارا هستند. پس پاسخ مسئله برابر ۳ است.

۱۷- پاسخ : ۳۰۰ ؛ توجه کنید که در مرحله n، روی هر خانه، تعداد گشت‌های به طول n از مبدأ به آن خانه نوشته می‌شود. پس برای حل سوال باید تعداد گشت‌های از مبدأ به خانه‌ی (۱,۱) را حساب کنیم. این معادل شمارش تعداد دنباله‌های به طول ۶ از حروف U، R، D و L است که $R = L + ۱$ و $U = D + ۱$ و به علاوه حاصل‌جمع آن‌ها برابر شش است. توجه کنید که حروف U، R ، D و L نمایش‌گر بالا و راست و پایین و چپ هستند. پس سه حالت داریم.

حالت ۱. $L = ۰, R = ۱, D = ۲, U = ۳$ در این حالت تعداد دنباله‌ها برابر $\frac{۶!}{۰!۱!۲!۳!} = ۶۰$ است.

حالت ۲. $L = ۱, R = ۲, D = ۱, U = ۲$ در این حالت تعداد دنباله‌ها برابر $\frac{۶!}{۱!۲!۱!۲!} = ۱۸۰$ است.

حالت ۳. $L = ۲, R = ۳, D = ۱, U = ۰$ در این حالت تعداد دنباله‌ها برابر $\frac{۶!}{۲!۳!۰!۱!} = ۶۰$ است.

پس در کل $۶۰ + ۱۸۰ + ۶۰ = ۳۰۰$ حالت داریم.

آکادمی تیزلاین، قویترین پلتفرم آموزشی تیزهوشان www.tizline.ir

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور

۱۸- پاسخ : ۲ ؛ فرض کنید اعداد ما $p < q < r < s$ باشند. داریم: $pq < pr < ps, qr < qs < rs$ پس دو حالت داریم:

حالت ۱: $pq = ۲, pr = ۸, ps = ۹, qr = ۳۲, qs = ۳۶, rs = ۱۴۴$ در این حالت با تقسیم روابط داریم که:

و با توجه به این که $pq = ۲$ پس $p = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲}$ و در نتیجه $q = ۲\sqrt{۲}$ ، $r = ۸\sqrt{۲}$ و $s = ۹\sqrt{۲}$.

حالت ۲: $pq = ۲, pr = ۸, qr = ۹, ps = ۳۲, qs = ۳۶, rs = ۱۴۴$ در این حالت با تقسیم روابط داریم که:

و با توجه به این که $pq = ۲$ پس $p = \frac{۴}{۳}$ و در نتیجه $q = \frac{۳}{۲}$ ، $r = ۶$ و $s = ۲۴$.

و توجه کنید که هر دوی این جواب‌ها درست هستند.

۱۹- پاسخ : ۳ ؛

مثال نقض برای گزینه‌ی ۱ : از آنجایی که همیشه $p_i \geq ۲$ ، f هیچ عددی نمی‌تواند ۲ باشد.

مثال نقض برای گزینه‌ی ۲ : $f(۲) = ۱ = f(۳)$. پس f یک به یک نیست.

مثال نقض برای گزینه‌ی ۴ : $m = ۴, n = ۸ \Rightarrow f(۴)f(۸) = ۴ \times ۹ = ۳۶ > ۲۵ = f(۳۲)$

مثال نقض برای گزینه‌ی ۵ : $m = ۲, n = ۲ \Rightarrow f(۲)f(۲) = ۱ \times ۱ = ۱ < ۴ = f(۴)$

دلیل درستی گزینه‌ی ۳ : خروجی تابع نمی‌تواند از یک عامل اول تنها یکی داشته باشد زیرا توان هر r_i، p_i است و اعداد اول(p_i ها)، بزرگتر مساوی دو هستند. حال ادعا می‌کنیم که این شرط کافی نیز هست یعنی اعداد به شکل $p_1^{r_1}p_2^{r_2}\dots p_k^{r_k}$ $(r_i \geq ۲)$ دقیقا در برد هستند. اثبات ادعا: فرض کنید بخواهیم خروجی تابع عدد $p_1^{r_1}p_2^{r_2}\dots p_k^{r_k}$ $(r_i \geq ۲)$ باشد. توجه کنید که هر عدد بزرگتر مساوی ۲ را می‌توان به صورت جمع مضارب نامنفی از ۲ و ۳ نوشت پس فرض کنید $r_i = ۲a_i + ۳b_i$. اکنون توجه کنید که خروجی تابع برای $۲^{p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_k^{a_k}}\,۳^{p_1^{b_1}p_2^{b_2}\dots p_k^{b_k}}$ برابر

$p_k^{2a_1+3b_1} p_2^{2a_2+3b_2} \dots p_k^{2a_k+3b_k}$ است که این همان مقدار مورد نظر است. همچنین چون اعداد معرفی شده نسبت به ضرب بسته‌اند، گزینه‌ی ۳ درست است.

۲۰- پاسخ : ۴ ؛ اگر چرخ را ۶ بار ۶۰ درجه بچرخانیم، میله هر بار مقدار ثابتی را جارو می‌کند و در نهایت یک دور کامل می‌زند. پس از ۳۶۰ درجه چرخش، دایره‌ی بزرگی به شعاع $100\sqrt{2}$ ایجاد خواهد شد. درون این دایره، دایره‌ای به شعاع ۱۰۰ است که خود چرخ بوده و در نتیجه جارو نمی‌شود. پس مساحت جارو شده برابر

است. حال توجه کنید که این مساحت برای ۶ بار چرخش است. پس مساحت جارو شده پس از طی ۶۰ درجه $\frac{314}{6}$ است و نزدیکترین عدد صحیح به این مساحت ۵۰ است.

۲۱- پاسخ : ۵۲ ؛ می‌دانیم $a_{n+2} = \max\{a_{n+1} - 1, a_n + 1\}$ پس $a_n \le a_{n+2} - 1$. با چند بار استفاده از این رابطه داریم: $a_4 \le a_6 - 1 \le a_8 - 2 \le \dots \le a_{100} - 48 \le 52$. $a_4 = \max\{a_3 - 1, a_2 + 1\}$ پس $a_3 \le 53$ و چون $a_n \le a_{n+2} - 1$ پس $a_1 \le a_3 - 1 \le 52$. پس ثابت کردیم که اولین عضو دنباله کم‌تر مساوی ۵۲ است. حال برای این کران بالا مثال می‌آوریم: $a_{2n+1} = 52 + n$ و $a_{2n} = 51 + n$.

۲۲- پاسخ : ۵ ؛ ادعا می‌کنیم که احسان هر گونه بازی کند حسام می‌تواند بازی را ببرد. برای اثبات ادعا این الگوریتم را برای حسام ارایه می‌دهیم. (این الگوریتم را می‌توان نوعی تقلید دانست.)

الگوریتم: اگر احسان مهره‌ای قرار داد، مهره‌ای کنار آن مهره قرار بده و اگر احسان مهره‌ای را بالا برد، مهره‌ای که کنار مهره‌ی حرکت داده شده بود را بالا ببر. با این الگوریتم پس از هر حرکت حسام، سطرها یا کاملاً پر و یا کاملاً خالی می‌شوند. پس احسان در هنگام حرکتش یا باید یک سطر را نیمه‌پر کند که حسام می‌تواند الگوریتم را اجرا کند و یا باید یک خانه از یک سطر پر را یک واحد بالا(به سطر تمام خالی بالایی) ببرد و در این حالت نیز حسام می‌تواند طبق الگوریتم حرکت خود را انجام دهد. پس برای هر حرکت احسان، حسام یک حرکت تضمین شده دارد که وضعیت بازی را مناسب برای حرکات بعدی

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور
با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور
آکادمی تیزلاین، کویتربی پلتفرم آموزشی تیزهوشان
www.tizline.ir

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور

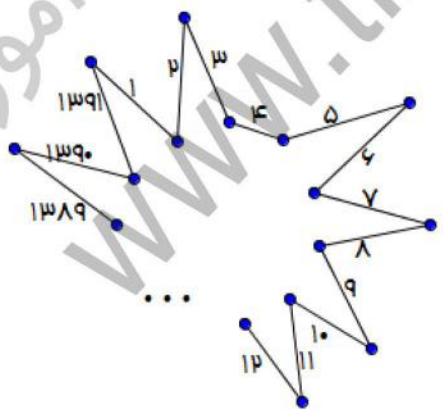
می‌کند. چون بازی بالاخره تمام می‌شود پس در نهایت کسی بدون حرکت می‌ماند. این فرد حسام نیست پس احسان است! پس حسام بازی را می‌برد.

۲۳- پاسخ : ۱۰ ؛ ب.م.م x و y را برابر d می‌گیریم. x' و y' را حاصل تقسیم x و y بر d می‌گیریم. پس داریم:

$x^{۲} + y^{۲}$

و چون $y \geq x \Rightarrow y' \geq x'$ پس $(dx' - y') = ۰ \Rightarrow y' = dx'$ و چون x' و y' نسبت به هم اول هستند، نتیجه می‌گیریم $x' = ۱ , y' = d$. پس جواب‌ها دقیقاً d و $d^{۲}$ ها هستند که ۱۰ تا از این جواب‌ها در بازه‌ی ۱ تا ۱۰۰ هستند.

۲۴- پاسخ : ۱۳۹۰ ؛ یک ضلع را در نظر بگیرید. دو سر این ضلع در چند ضلعی دو زاویه‌ی داخلی داریم. این ضلع «ناجور» است اگر و تنها اگر یکی از این دو زاویه بیش‌تر از ۱۸۰ درجه و یکی از این دو زاویه کم‌تر از ۱۸۰ درجه باشد. در غیر این صورت هر دو ضلع کناری در یک طرف پاره‌خط قرار می‌گیرند. اکنون ادعا می‌کنیم که نمی‌توان ۱۳۹۱ضلعیِ ناجور داشت. زیرا اگر تمام ضلع‌ها ناجور باشند، زوایا یکی در میان کم‌تر و بیش‌تر از ۱۸۰ درجه هستند و چون ۱۳۹۱ فرد است این موضوع امکان ندارد. مثال برای ۱۳۹۰ را در زیر مشاهده کنید:



۲۵- پاسخ : ۱۴ ؛ هنگامی که دایره‌ی nاُم را اضافه می‌کنیم حداکثر در $۲\left(n - ۱\right)$ نقطه با دیگر دایره‌ها برخورد دارد. از طرفی هر دایره که اضافه می‌کنیم به تعداد کمان‌هایش ناحیه‌ها را زیاد می‌کند. پس دایره‌ی اول دو ناحیه ایجاد می‌کند. دایره‌ی دوم دو ناحیه‌ی جدید اضافه می‌کند. دایره‌ی سوم حداکثر $۲ \times ۲ = ۴$ ناحیه‌ی اضافه ایجاد می‌کند و دایره‌ی چهارم

حداکثر $۲ \times ۳ = ۶$ ناحیه‌ی جدید ایجاد می‌کند. پس در کل حداکثر $۲ + ۲ + ۴ + ۶ = ۱۴$ ناحیه خواهیم داشت. توجه کنید هر گونه که ۴ دایره روی کره بگذاریم که هر دوتایی متقاطع باشند و هیچ سه تایی در یک نقطه به هم نرسند ۱۴ ناحیه خواهیم داشت.

آکادمی تیزلاین

برگزار می کند:

www.tizline.ir
۰۲۱۴۴۱۳۶۹۷۵

دوره سالانه

تخفیف ویژه برای تیزلاینی ها

دکتر رضا رحمت اله زاده

کلاس آنلاین المپیاد
شیمی (سطح یک)

شنبه‌ها ۲۰ تا ۲۱:۱۵
شروع از ۲۲ آبان

۱۵ جلسه
۶۰۰ هزار تومان

دکتر افشین بهمرام

کلاس آنلاین المپیاد
ریاضی (سطح یک)

یکشنبه‌ها ۲۰ تا ۲۱:۱۵
شروع از ۲۳ آبان

۱۵ جلسه
۶۰۰ هزار تومان

دکتر میثم کوهگرد

کلاس آنلاین المپیاد
فیزیک (سطح یک)

پنجشنبه‌ها ۱۸:۱۵ تا ۱۹:۳۰
شروع از ۲۷ آبان

۱۵ جلسه
۶۰۰ هزار تومان

دکتر قربانی

کلاس آنلاین المپیاد
زیست‌شناسی (سطح یک)

سه‌شنبه‌ها ۱۸:۱۵ تا ۱۹:۳۰
شروع از ۲۵ آبان

۱۵ جلسه
۶۰۰ هزار تومان

دکتر میثم کوهگرد

کلاس آنلاین المپیاد
فیزیک (سطح دو)

پنجشنبه‌ها ۲۰ تا ۲۱:۱۵
شروع از ۲۷ آبان

۲۰ جلسه
۸۰۰ هزار تومان

دکتر قربانی

کلاس آنلاین المپیاد
زیست‌شناسی (سطح دو)

سه‌شنبه‌ها ۲۰ تا ۲۱:۱۵
شروع از ۲۵ آبان

۲۰ جلسه
۸۰۰ هزار تومان

#تیزلاینی_شو

ثبت نام در سایت رسمی

tizline.ir
www.tizline.ir

۰۹۳۳-۳۸۴ ۰۲۰۲

۰۲۱-۹۱۳۰۲۲۰۲

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور

تقویم آموزشی آکادمی تیزلاین

سال ۱۴۰۱-۱۴۰۰

#تیزلاینی_شو

ترم تابستان

آغاز ثبت نام: ۱۰ خرداد

شروع دوره: ۱۲ تیر

پایان دوره: ۲۰ شهریور

۱۰ جلسه

ترم یک دوره سالانه

آغاز ثبت نام: ۱ شهریور

شروع دوره: ۱۰ مهر

پایان دوره: ۱۸ دی

۱۵ جلسه

ترم دو دوره سالانه

آغاز ثبت نام: ۱ دی

شروع دوره: ۱ بهمن

پایان دوره: ۲۵ اردیبهشت

۱۵ جلسه

آنلاین تخصص ماست

کلاس ، آزمون ، مشاوره ، تکلیف

ثبت نام در سایت رسمی آکادمی تیزلاین www.Tizline.ir

آزمون های هماهنگ از ۲۵ مهر تا ۱۱ اردیبهشت