



آکادمی آنلاین تیزلاین قوی ترین پلتفرم آموزشی تیز هوشان

برگزار کننده کلاس های آنلاین و حضوری تیز هوشان ✓

و المپیاد از پایه چهارم تا دوازدهم

آزمون های آنلاین و حضوری ✓

مشاوره تخصصی ✓

با اسکن QR کد روبرو
وارد صفحه اینستاگرام
آکادمی تیزلاین شو و از
محتواهای آموزشی
رایگان لذت ببر



برای ورود به صفحه اصلی سایت آکادمی تیزلاین کلیک کنید

برای دانلود دفترچه آزمون های مختلف برای هر پایه کلیک کنید

برای مطالعه مقالات بروز آکادمی تیزلاین کلیک کنید

دانش آموز عزیز، در این بخش شما باید به ۱۰ سؤال پاسخ دهید. جواب این سؤالات یک عدد حداکثر پنج رقمی است و شما باید ارقام آن را جداگانه در پاسخ نامه بنویسید. به عنوان مثال اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵۰ بود شما باید در مقابل شماره سؤال در پاسخ نامه، چنین چیزی بنویسید:

	۶	۹	۵	۰
--	---	---	---	---

خوانا بنویسید، چون پاسخ شما توسط ماشین خوانده خواهد شد. البته لازم نیست کاملاً شبیه نمونه بالا بنویسید؛ حتی نوشتن رقم ۶ به شکل «۶» هم ایرادی ندارد ولی به هیچ وجه از ارقام انگلیسی استفاده نکنید. پاسخ درست به هر سؤال در این قسمت ۴ نمره مثبت دارد. در مورد این ۱۰ سؤال پاسخ نادرست نمره منفی ندارد.

۱. فرض کنید a ، b و c اعدادی طبیعی باشند که $ac = 2012$ ، بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b برابر ۱ و کوچکترین مضرب مشترک b و c برابر ۱۳۹۰ است. مقدار $a + b + c$ چند است؟

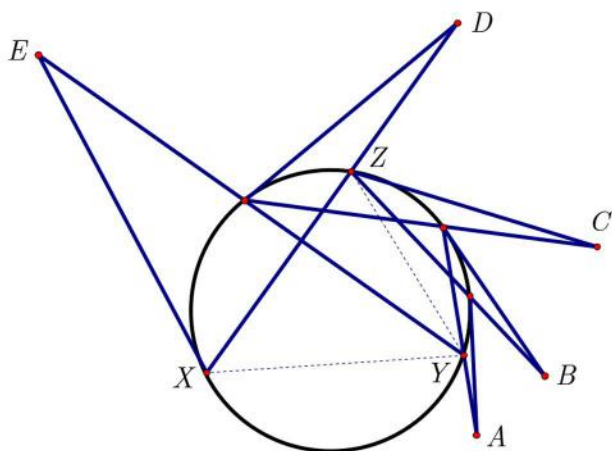
۲. اخیراً سه شهر نمکستان، سماقستان و فلفلستان که از توابع شکرستان هستند از طریق خط راه آهن مستقیماً به شکرستان متصل شده اند. جهان گردی سفر خود را از نمکستان شروع کرده و ۱۲ بلیط قطار دارد و می خواهد از همه بلیط های خود استفاده کند. اگر او بخواهد دقیقاً یک بار به سماقستان وارد شود به چند روش می تواند سفر خود را انجام دهد؟ (توجه کنید که بین نمکستان، سماقستان و فلفلستان مسیر مستقیم وجود ندارد.)



۳. مجموع اعداد حقیقی نامنفی a ، b و c برابر ۳۰ است. بیشترین مقدار ممکن $3ab + 4bc$ چه قدر است؟

۴. به چند حالت می توان در عبارت $7 \pm 6 \pm 5 \pm 4 \pm 3 \pm 2 \pm 1$ مثبت ها و منفی ها را تعیین کرد که حاصل مثبت باشد؟

۵. در دو طرف خیابان اصلی شهر هجده چراغ برق در دو ردیف نه تایی مقابل هم نصب شده اند. فاصله بین دو چراغ متوالی پنجاه متر و عرض خیابان ده متر است. بعضی از چراغ ها خاموش شده اند اما در فاصله کمتر از شصت متر از هر چراغ خاموش حداکثر سه چراغ خاموش دیگر وجود دارد. تعداد چراغ های خاموش حداکثر چندتا است؟



۶. شش نقطه روی یک دایره قرار دارند و با رسم برخی خطوط مماس و خطوط واصل آنها، شکل روبه‌رو حاصل شده است. اگر زوایای \hat{A} ، \hat{B} ، \hat{C} ، \hat{D} و \hat{E} ، به ترتیب، برابر با ۴، ۷، ۱۰، ۱۳ و ۱۶ درجه باشند، اندازه زاویه \hat{XYZ} را بر حسب درجه بنویسید. (اگر پاسخ عدد صحیح نیست، جزء صحیح آن را بنویسید.)

۷. فرض کنید a و b اعدادی طبیعی باشند که تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت a ، b و ab ، به ترتیب، برابر با ۳، ۴ و ۸ باشد. عدد b^2 چند مقسوم‌علیه مثبت دارد؟

۸. به چند طریق می‌توان ۴ مهره در یک جدول 4×4 قرار داد که در هر سطر و در هر ستون دست‌کم یک مهره وجود داشته باشد؟

۹. در مثلث ABC داریم $\angle BAC = 60^\circ$ ، $AB = 7\sqrt{3}$ و $AC = 14\sqrt{3}$. نقطه متغیر X را روی پاره‌خط BC در نظر می‌گیریم. از نقطه X دو خط به موازات AB و AC رسم می‌کنیم تا به ترتیب AC و AB را در نقاط Y و Z قطع کنند. طول پاره‌خط BX چه قدر باشد تا پاره‌خط YZ کم‌ترین طول ممکن را داشته باشد؟

۱۰. چندجمله‌ای $P(x)$ برابر است با مجموع x^n ‌هایی که $1 \leq n \leq 120$ و n بر دست‌کم یکی از اعداد ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشد. این چندجمله‌ای چند ریشه حقیقی متمایز دارد؟

دانش آموز عزیز، در این بخش شما باید به ۱۵ سؤال پنج گزینه ای پاسخ دهید. در این قسمت پاسخ درست به هر سؤال ۴ نمره مثبت و پاسخ نادرست ۱ نمره منفی دارد.

۱. یک جسم به شکل مکعب مستطیل با ارتفاع ۳ و قاعده ۴×۶ روی زمین قرار دارد. نقطه A روی ضلعی از قاعده که طول آن ۶ است قرار دارد. جسم را حول ضلع مقابل آن روی زمین می غلطانیم و این کار را در همان جهت آن قدر ادامه می دهیم تا جسم یک دور کامل بچرخد. نقطه A چه مسافتی را در فضای طی کرده است؟

الف) ۳π ب) ۴π ج) ۶π د) ۸π ه) ۱۲π

۲. سه مجموعه A ، B و C را در نظر بگیرید. کدام یک از گزینه ها، برابر مجموعه اعضای است که دست کم عضو دو تا از این سه مجموعه است؟

الف) $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$ ب) $A \cup B \cup C \cup (A \cap B \cap C)$
ج) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$ د) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (A \cup C)$
ه) گزینه های ج و د هر دو صحیح هستند.

۳. به چند روش می توان مجموعه $\{۱, ۲, \dots, ۳۰\}$ را دو قسمت کرد که حاصل ضرب اعضای آنها با یکدیگر برابر باشد؟

الف) این کار ممکن نیست. ب) بین ۱ و ۱۰ روش
ج) بین ۱۱ و ۱۰۰ روش د) بین ۱۰۱ و ۱۰۰۰ روش
ه) بیش از ۱۰۰۰ روش

۴. مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین ABC به زاویه رأس A و طول ۱۰ ساق مفروض است. نقطه D در صفحه مفروض است به طوری که، نقطه A داخل مثلث BCD قرار می گیرد. نیم سازه های داخلی زوایای $\angle CAD$ و $\angle BAD$ را رسم می کنیم تا اضلاع BD و CD را به ترتیب، در نقاط E و F قطع کنند. اگر مرکز ثقل مثلث BCD واقع بر پاره خط EF باشد، طول پاره خط AD چه قدر است؟

الف) ۱۰ ب) ۱۵ ج) ۲۰ د) ۳۰ ه) بستگی به مکان D دارد.

۵. چند جمله ای $x^4 - x^2 - 2x - 1$ را در نظر بگیرید. مجموعه x هایی که به ازای آنها این چند جمله ای نامنفی است، چه شکلی دارد؟

الف) یک پاره خط ب) دو پاره خط
ج) یک پاره خط و یک نیم خط د) یک پاره خط و دو نیم خط
ه) دو نیم خط

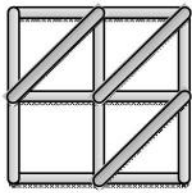
۶. به چند طریق می‌توان دو عدد طبیعی a و b را از بین اعداد ۱ تا ۱۰ انتخاب کرد که کسر

$$\frac{a+b}{a-b}$$

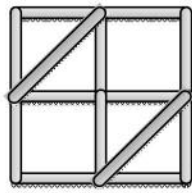
عددی طبیعی باشد؟

- الف) ۱۹ (ب) ۲۴ (ج) ۲۸ (د) ۲۹ (ه) ۳۴

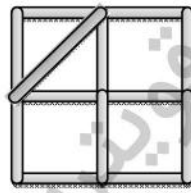
۷. فرض کنید با لولا کردن تعدادی قطعه چوبی به طول‌های یک متر و $\sqrt{2}$ متر چهار شکل زیر را ساخته‌ایم به طوری که قطعات می‌توانند آزادانه در صفحه، دور لولاها بچرخند. چند تا از این شکل‌ها می‌توانند با حرکت قطعه چوب‌ها تغییر شکل دهند؟



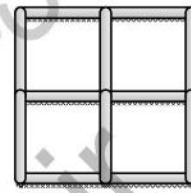
۴ (ه)



۳ (د)

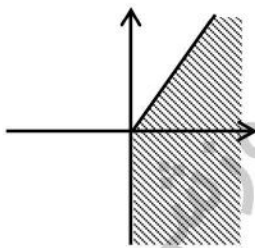


۲ (ج)

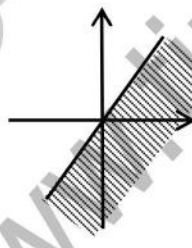


الف) هیچ کدام (ب) ۱

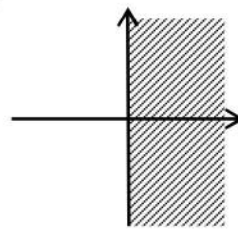
۸. مجموعه نقاطی از صفحه که دارای نمایشی به شکل $(x^2 + y^2, xy)$ هستند، که x و y اعدادی حقیقی هستند، کدام گزینه است؟ (شکل‌ها تقریبی هستند.)



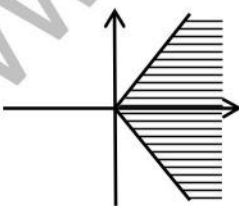
(ج)



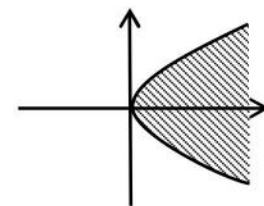
(ب)



الف)

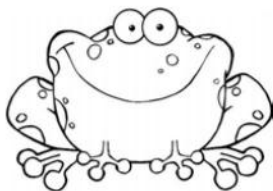


(ه)



(د)

۹. یک وزغ و یک ملخ در فاصله ۲ متری یک‌دیگر قرار دارند. وزغ در هر ثانیه ۲۵ یا ۵۰ سانتی‌متر به سمت ملخ، روی زمین، حرکت می‌کند و ملخ نیز در هر ثانیه ۲۵ یا ۵۰ سانتی‌متر به سمت وزغ می‌پرد. در صورتی که این دو روی زمین به هم برسند، وزغ ملخ را می‌خورد و می‌ایستد. به چند روش ممکن است ملخ خورده شود؟



- الف) ۸ (ب) ۱۷ (ج) ۱۸ (د) ۲۴ (ه) ۳۲

۱۰. فرض کنید چهار خط در فضا داده شده‌اند که دو تا از آن‌ها متقاطع‌اند و به جز آن دو، نه هیچ دو خطی متقاطع هستند و نه موازی. حداکثر چند خط در فضا وجود دارد که هر چهار تای آن‌ها را قطع کند؟

- (الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) بی‌نهایت
(ه) هیچ خطی نمی‌تواند هر چهار تا را قطع کند.

۱۱. بزرگ‌ترین عدد حقیقی a که برای هر دو عدد حقیقی x و y که $xy^2 + 4x^2y + 5 = 0$ و $x > 0$ ، داشته باشیم $ax < y$ ، کدام است؟

- (الف) $-\sqrt{80}$ (ب) -4 (ج) 0 (د) 4 (ه) $\sqrt{80}$

۱۲. به چند طریق می‌توان سه عدد طبیعی x ، y و z را انتخاب کرد که $xy + yz + xz = xyz$ ؟

- (الف) ۷ (ب) ۴ (ج) ۲ (د) ۱ (ه) ممکن نیست.



۱۳. رستوران «مرغ تخم‌طلا» هر روز تنها یکی از غذاهای نیم‌رو، املت و تخم‌مرغ آب‌پز را ارائه می‌کند! مدیر رستوران می‌خواهد برنامه هفتگی را طوری تنظیم کند که غذای هیچ دو روز متوالی یکی نباشد. این کار به چند روش مختلف ممکن است؟ (توجه کنید که روز بعد از جمعه، شنبه است!)

- (الف) ۷۸ (ب) ۸۴ (ج) ۱۲۶ (د) ۱۶۸ (ه) ۱۹۲

۱۴. چند زوج مرتب (x, y) از اعداد حقیقی، در دستگاه معادلات روبه‌رو صدق می‌کند؟

$$\begin{cases} x^2 + y = xy^2 \\ y^2 + x = yx^2 \end{cases}$$

- (الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۴ (ه) ۵

۱۵. فرض کنید چهارضلعی محدب $ABCD$ محیطی نیست؛ یعنی دایره‌ای وجود ندارد که بر هر چهار ضلع آن مماس باشد. دایره‌هایی را در نظر بگیرید که بر سه ضلع از این چهارضلعی مماس هستند. چند تا از این دایره‌ها کاملاً داخل چهارضلعی قرار می‌گیرند؟

- (الف) بسته به چهارضلعی، گاهی دو تا، گاهی سه تا و گاهی چهار تا (ب) گاهی دو تا و گاهی سه تا (ج) گاهی یکی و گاهی دو تا (د) همواره دو تا (ه) همواره یکی

سؤالات کوتاه پاسخ بر اساس کد یک.

۱. تجزیه‌ی 2012 به عوامل اول به صورت $2012 = 2^2 \times 503$ است که چون $ac = 2012$ پس باید دقیقاً یکی از a و c بر 503 بخش پذیر باشد. حالت $503 | c$ با توجه به این که $[b, c] = 1390$ و این که 1390 بر 503 بخش پذیر نیست امکان ندارد. پس $503 | a$ و لذا حالت‌های زیر را داریم.
- الف. $a = 503$ و $c = 4$. از آنجا که $[b, c] = 1390$ بر 4 بخش پذیر نیست امکان ندارد.
- ب. $a = 1006$ و $c = 2$. از آنجا که $[b, c] = 1390$ مقدار b برابر 695 و یا 1390 است که چون a و b طبق فرض مسئله عامل مشترک ندارند تنها حالت $b = 695$ قابل قبول است که در این حالت $a + b + c = 1703$.
- پ. $a = 2012$ و $c = 1$. از آنجا که $[b, c] = 1390$ ، b باید برابر 1390 باشد که با $(a, b) = 1$ تناقض دارد.

بنابراین پاسخ مسئله 1703 است.

۲. در سفر اول مجبوریم به شکرستان برویم. در 11 سفر بعدی، در سفرهای فرد به یکی از توابع شکرستان می‌رویم و در سفرهای زوج به شکرستان بازمی‌گردیم. پس تنها سفرهای فرد که شش تا هستند را بررسی می‌کنیم. می‌دانیم که دقیقاً یکی از این سفرها به سماقستان است. برای انتخاب این سفر از بین 6 سفر 6 حالت داریم. برای مقصد هر کدام از 5 سفر دیگر هم 2 گزینه‌ی نمکستان و فلفلستان وجود دارد. پس طبق اصل ضرب پاسخ مسئله $6 \times 2^5 = 192$ است.

۳. بیش‌ترین مقدار ممکن برای $3ab + 4bc$ برابر 900 است. برای اثبات این حکم ابتدا یک لم را بیان و اثبات می‌کنیم.

لم. برای هر دو عدد حقیقی x و y ، $4xy \leq (x + y)^2$.

اثبات. $(x + y)^2 - 4xy = (x - y)^2 \geq 0$.

$$3ab + 4bc = 4(a+c)b - ab \leq 4(a+c)b \leq ((a+b)+c)^2 = 900$$

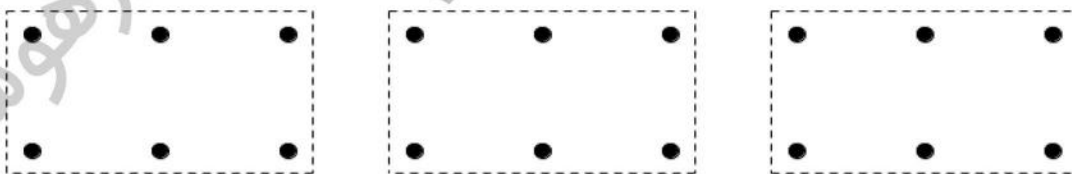
و تساوی زمانی است که $ab = 0$ و $a+c = b = 15$ و $a = 0$ و $b = c = 15$.

۴. دقت کنید که اگر در چنین عبارتی مجموع اعدادی که علامت آن‌ها منفی است برابر S باشد، عدد حاصل برابر $28 - 2S$ خواهد بود. $(28 = 1 + 2 + \dots + 7)$

به علاوه دقت کنید اگر با یک ترکیب از مثبت و منفی‌ها به عددی مثبت برسیم، اگر به جای مثبت‌ها منفی و به جای منفی‌ها مثبت قرار دهیم به عددی منفی می‌رسیم و بالعکس. پس تعداد حالت‌هایی که به مثبت می‌رسیم دقیقاً برابر تعداد حالت‌هایی است که به منفی می‌رسیم. با این توضیحات باید تعداد حالت‌هایی را پیدا کنیم که به حاصل صفر می‌رسیم.

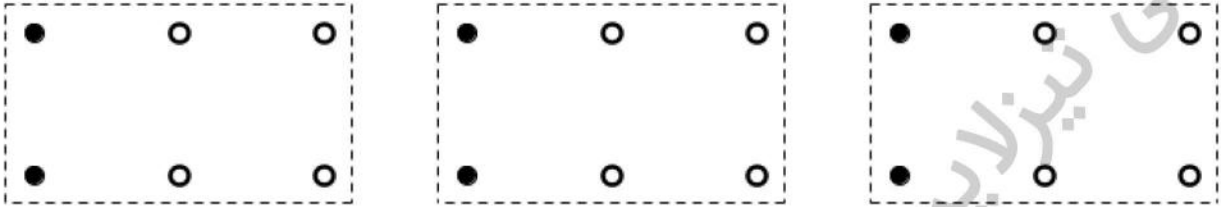
طبق توضیحات ابتدایی برای این که عدد حاصل برابر صفر شود باید مجموع اعدادی که علامت آن‌ها منفی است برابر ۱۴ باشد. پس باید تعداد حالت‌های انتخاب چنین اعدادی را بشماریم. حال اگر بزرگ‌ترین عدد انتخاب شده ۷ باشد، باید مجموع اعداد دیگر برابر ۷ شود که حالت‌های ممکن $\{1, 6\}$ ، $\{2, 5\}$ ، $\{3, 4\}$ و $\{1, 2, 4\}$ است. اگر بزرگ‌ترین عدد انتخاب شده ۶ باشد، باید مجموع اعداد دیگر ۸ شود که حالت‌های ممکن $\{5, 3\}$ ، $\{1, 2, 5\}$ و $\{1, 3, 4\}$ هستند و اگر بزرگ‌ترین عدد انتخاب شده ۵ باشد، باید مجموع اعداد دیگر ۹ شود که فقط حالت $\{2, 3, 4\}$ این طور است. بنابراین در هشت حالت به حاصل صفر می‌رسیم و در غیر از این هشت حالت در نیمی از حالات به مثبت و در نیم دیگر به منفی می‌رسیم و چون تعداد کل علامت‌گذاری‌های ممکن 2^7 تا است، تعداد حالت‌های منجر به عدد مثبت $\frac{2^7 - 8}{2} = 60$ است.

۵. چراغ‌ها را مطابق شکل زیر به سه دسته تقسیم می‌کنیم.

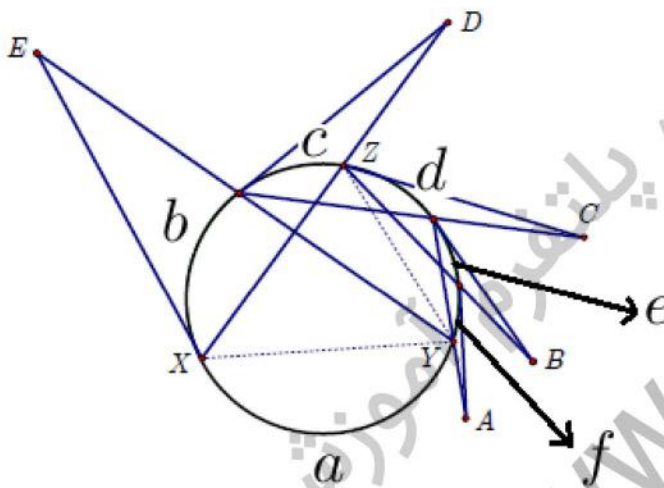


اگر در یک دسته بیش‌تر از ۴ چراغ خاموش باشد، پس یکی از دو چراغ وسطی این آن دسته خاموش است. توجه کنید از آن‌جا که این چراغ از پنج چراغ دیگر هم‌دسته‌اش فاصله‌ای کم‌تر از ۶۰ متر دارد، با این فرض که در هم‌سایگی ۶۰ متری هر چراغ خاموش حداکثر سه چراغ خاموش دیگر قرار دارد تناقض دارد. پس در

هر دسته حداکثر چهار چراغ خاموش داریم و بنابراین در کل حداکثر ۱۲ چراغ می‌تواند خاموش باشد. شکل زیر مثالی برای ۱۲ چراغ را نمایش می‌دهد. (دایره‌های توخالی چراغ‌های خاموش هستند).



۶. مانند شکل روبه‌رو کمان‌های را نام‌گذاری می‌کنیم. در این صورت معلومات سؤال معادل این خواهد بود که



$$\begin{aligned} e - f &= 8^\circ, d - e = 14^\circ, \\ c - d &= 2^\circ, b - c = 26^\circ, \\ a - b &= 32^\circ \end{aligned}$$

هم‌چنین می‌دانیم $a + b + c + d + e + f = 36^\circ$. حال همه‌ی زاویه‌ها را بر حسب f می‌نویسیم و در رابطه‌ی بالا قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned} f + \overbrace{(f + 8^\circ)}^e + \overbrace{(f + 8^\circ + 14^\circ)}^d + \overbrace{(f + 8^\circ + 14^\circ + 2^\circ)}^c + \\ \overbrace{(f + 8^\circ + 14^\circ + 2^\circ + 26^\circ)}^b + \overbrace{(f + 8^\circ + 14^\circ + 2^\circ + 26^\circ + 32^\circ)}^a = 36^\circ \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 6f + 24^\circ = 36^\circ \Rightarrow f = 2^\circ \Rightarrow c = 62^\circ, b = 88^\circ$$

$$\Rightarrow \angle XYZ = \frac{b + c}{2} = \frac{62^\circ + 88^\circ}{2} = 75^\circ$$

۷. توجه کنید که اگر تجزیه ی عدد طبیعی n به صورت حاصل ضرب اعداد اول به شکل $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ باشد، تعداد مقسوم علیه های مثبت آن که با نماد $d(n)$ نمایش می دهیم برابر $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$ خواهد بود.

طبق فرض های صورت سؤال در مورد تعداد مقسوم علیه های این اعداد، a باید به شکل p^2 و b باید به شکل q^3 و یا rs باشد که p, q, r, s اعداد اول هستند و $r \neq s$. بنابراین ab باید به شکل $q^3 p^2$ و یا rsp^2 باشد. حال حالت های زیر متصور هستند.

الف. $ab = q^3 p^2$. اگر $p = q$ ، $d(ab) = 6$ و اگر $p \neq q$ ، $d(ab) = 12$ که هیچ کدام قابل قبول نیستند.

ب. $ab = rsp^2$. اگر r, s, p سه عدد اول متمایز باشند، $d(ab) = 12$ که باز هم قابل قبول نیست. بنابراین p با یکی از r و s برابر است که می توان فرض کرد $p = r$. در این صورت $ab = sp^3$ و لذا $d(ab) = 8$ که حالت مورد قبول است.

بنابراین b به شکل ps است و لذا $b^2 = p^2 s^2$ و این نتیجه می دهد که تعداد مقسوم علیه های b^2 برابر ۹ است.

۸. برای انتخاب خانه های از سطر اول که مهره در آن قرار می گیرد ۴ حالت داریم. با انتخاب مهره ی سطر اول در یکی از خانه های سطر دوم نمی توان مهره قرار داد، پس برای انتخاب خانه های که مهره ی سطر دوم در آن قرار می گیرد ۳ حالت داریم. به همین ترتیب برای انتخاب خانه هایی از سطر سوم و چهارم که مهره در آنها قرار می گیرد به ترتیب ۲ و ۱ حالت داریم. پس پاسخ مسئله برابر است با $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

۹. اگر پای عمود وارد از C بر ضلع AB را H بنامیم، مثلث AHC مثلثی قائم الزاویه ای با وتر به طول $14\sqrt{3}$ است که $\angle CAH = 60^\circ$. پس

$$AH = AC \cdot \cos(\angle CAH) = AC \cdot \cos(60^\circ) = 14\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 7\sqrt{3} = AB$$

و لذا B همان نقطه ی H است و این یعنی مثلث ABC خود قائم الزاویه است ($\angle B = 90^\circ$) و طبق قضیه ی فیثاغورس $BC = \sqrt{14^2 \times 3 - 7^2 \times 3} = 7\sqrt{9} = 21$.

حال طول YZ را بر حسب BX محاسبه می کنیم. طبق قضیه ی فیثاغورس در مثلث YZS داریم:

$$YZ^2 = ZS^2 + YS^2 = BX^2 + (YX - ZB)^2$$

طبق قضیه ی تالس و از آن جا که $YX \parallel AB$ ، $\frac{YX}{AB} = \frac{CX}{BC}$ و لذا $\frac{YX}{21} = \frac{CX}{BC}$ ، $YX = 7\sqrt{3} \frac{21 - BX}{21} = \frac{21 - BX}{\sqrt{3}}$

از طرف دیگر با توجه به این که $\angle ZXB = 30^\circ$ و $\frac{ZB}{BX} = \tan(\angle ZXB) = \tan(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ به

دست می آوریم که $ZB = \frac{BX}{\sqrt{3}}$

با جای گذاری دو رابطه ی اخیر در عبارت مربوط به YZ خواهیم داشت:

$$YZ^2 = BX^2 + \left(\frac{21 - 2BX}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$\Rightarrow 3YZ^2 = 3BX^2 - 84BX + 441 = 3(BX^2 - 12BX + 36) + 189$$

$$\Rightarrow YZ^2 = \frac{1}{3}(BX - 6)^2 + \frac{189}{3} \geq \frac{189}{3}$$

بنابراین کمترین مقدار YZ^2 برابر $\frac{189}{3}$ است و زمانی به این مقدار می رسیم که $BX = 6$ باشد.

۱۰. اعدادی بر ۲ یا ۳ بخش پذیر هستند که باقی مانده ی تقسیم آن ها بر ۶، یکی از اعداد ۰، ۲، ۳ و ۴ باشد، معادلاً به فرم $6k$ ، $6k + 2$ ، $6k + 3$ و یا $6k + 4$ باشد. بنابراین داریم

$$P(x) = \sum_{\substack{(n,6) \neq 1 \\ 1 \leq n \leq 12}} x^n$$

$$= \sum_{1 \leq 6k \leq 12} x^{6k} + \sum_{1 \leq 6k+2 \leq 12} x^{6k+2} + \sum_{1 \leq 6k+3 \leq 12} x^{6k+3} + \sum_{1 \leq 6k+4 \leq 12} x^{6k+4}$$

$$= \sum_{k=0}^{19} x^{6k+6} + \sum_{k=0}^{19} x^{6k+2} + \sum_{k=0}^{19} x^{6k+3} + \sum_{k=0}^{19} x^{6k+4}$$

$$= (x^6 + x^2 + x^3 + x^4) \left(\sum_{k=0}^{19} x^{6k} \right)$$

$$= x^2(1 + x + x^2 + x^4)(1 + x^6 + x^{12} + \dots + x^{114})$$

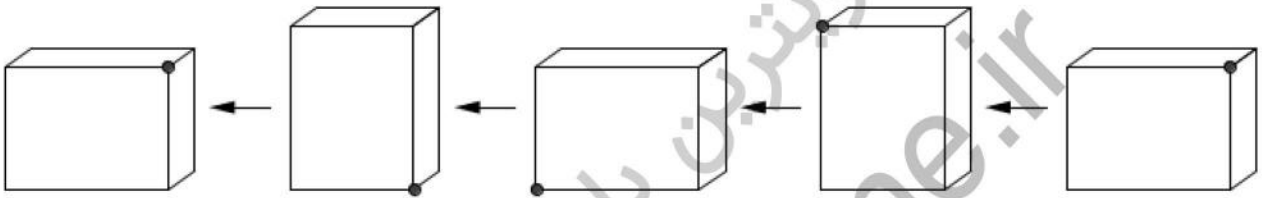
حال دقت کنید که همه ی جملات عبارت $x^6 + x^{12} + \dots + x^{114}$ نامنفی هستند و لذا

$$1 + x^6 + x^{12} + \dots + x^{114} > 0$$

و بنابراین این چندجمله‌ای ریشه‌ی حقیقی ندارد. از طرف دیگر $1 + x + x^2$ یک چندجمله‌ای درجه دوم است که همواره مقدار آن مثبت است و با توجه به نامنفی بودن x^4 ، $1 + x + x^2 + x^4$ هم همواره مثبت است و ریشه‌ی حقیقی ندارد. پس تنها ریشه‌ی چندجمله‌ای $P(x)$ همان صفر است.

۱. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

جسم به شکل زیر روی زمین غلطیده:



(دقت کنید که نسبت عمق مکعب که برابر ۶ است به دلیل راحتی در رسم رعایت نشده است و ضمناً نقطه‌ی پررنگ در شکل‌های بالا محل نقطه‌ی A را در هر گام مشخص می‌کند.)
در هر مرحله مکعب مستطیل حول ضلع پایین سمت چپ چرخیده است. پس

در چرخش اول نقطه‌ی A ، ربع دایره‌ای به شعاع ۵ را طی می‌کند. بنابراین مسافتی به طول $\frac{2\pi \times 5}{4} = \frac{5}{2}\pi$ را طی کرده است.

در چرخش دوم نقطه‌ی A ، ربع دایره‌ای به شعاع ۴ را طی می‌کند. بنابراین مسافتی به طول $\frac{2\pi \times 4}{4} = 2\pi$ را طی کرده است.

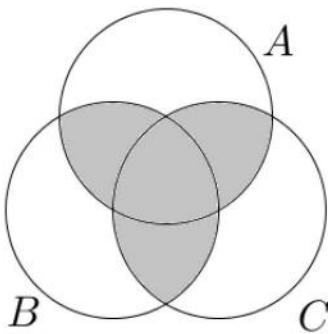
در چرخش سوم نقطه‌ی A ، ثابت مانده و بنابراین مسافتی طی نکرده است.

در چرخش چهارم نقطه‌ی A ، ربع دایره‌ای به شعاع ۳ را طی می‌کند. بنابراین مسافتی به طول $\frac{2\pi \times 3}{4} = \frac{3}{2}\pi$ را طی کرده است.

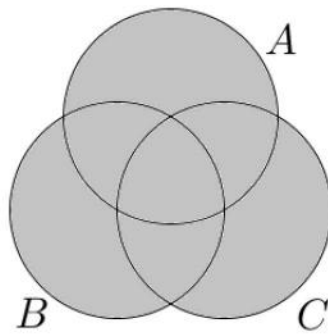
بنابراین در کل این نقطه مسافت $\frac{5}{2}\pi + 2\pi + \frac{3}{2}\pi = 6\pi$ را طی کرده است.

۲. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

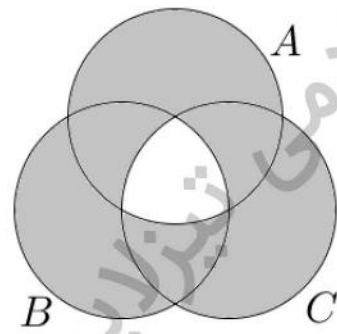
از نمودار ون برای حل این سؤال استفاده می کنیم.



گزینه‌ی ج و د



گزینه‌ی ب



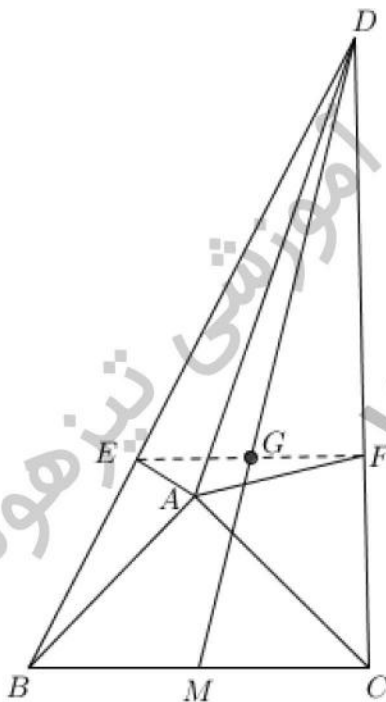
گزینه‌ی الف

۳. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

اگر حاصل ضرب اعداد دو دسته برابر A باشد، $A! = 1 \times 2 \times \dots \times 30 = 30!$ اما در $30!$ تنها یک عامل ۲۳ وجود دارد، پس امکان ندارد که $30!$ مربع کامل باشد. بنابراین چنین عملی ممکن نیست.

۴. گزینه‌ی (ج) صحیح است.

با توجه به این که پاره‌خط‌های AE و AF نیم‌ساز هستند، $\frac{DE}{EB} = \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{DF}{FC}$ و بنا بر قضیه‌ی تالس $EF \parallel BC$. حال چون EF از مرکز ثقل مثلث BCD می‌گذرد نتیجه می‌گیریم $\frac{DE}{EB} = \frac{DG}{GM} = \frac{2}{1}$ و بنا بر این $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{EB} = 2$. پس $AD = 2AB = 20$.



۵. گزینه‌ی (ه) صحیح است.

ابتدا دقت کنید که

$$x^4 - x^2 - 2x - 1 = x^4 - (x + 1)^2 = (x^2 - x - 1)(x^2 + x + 1)$$

عبارت $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ همواره مثبت است پس علامت چندجمله‌ای صورت سؤال با علامت چندجمله‌ای $x^2 - x - 1$ یکسان است. عبارت $x^2 - x - 1$ یک سهمی است که دارای دو ریشه ی $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ است، پس برای مقادیر بزرگ‌تر از ریشه‌ی بزرگ‌تر و کوچک‌تر از ریشه‌ی کوچک‌تر یعنی $(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty)$ که اجتماع دو نیم‌خط است، مقدار چندجمله‌ای نامنفی است.

۶. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

چون مقدار عبارت طبیعی شده و با توجه به این که صورت کسر مثبت است، مخرج کسر هم باید مثبت باشد و بنابراین $a > b$. از طرف دیگر دقت کنید که $a - b \mid a + b$ معادل این است که $a - b \mid 2b$. حال مسئله را بر حسب مقادیر مختلف b حالت‌بندی می‌کنیم.

$$b = 1, a - 1 \mid 2, \text{ پس } a - 1 \in \{1, 2\} \text{ و لذا } a \in \{2, 3\} \text{ دو حالت دارد.}$$

$$b = 2, a - 2 \mid 4, \text{ پس } a - 2 \in \{1, 2, 4\} \text{ و لذا } a \in \{3, 4, 6\} \text{ سه حالت دارد.}$$

$$b = 3, a - 3 \mid 6, \text{ پس } a - 3 \in \{1, 2, 3, 6\} \text{ و لذا } a \in \{4, 5, 6, 9\} \text{ چهار حالت دارد.}$$

$$b = 4, a - 4 \mid 8, \text{ پس } a - 4 \in \{1, 2, 4, 8\} \text{ و لذا } a \in \{5, 6, 8\} \text{ سه حالت دارد.}$$

$$b = 5, a - 5 \mid 10, \text{ پس } a - 5 \in \{1, 2, 5, 10\} \text{ و لذا } a \in \{6, 7, 10\} \text{ سه حالت دارد.}$$

$$b = 6, a - 6 \mid 12, \text{ پس } a - 6 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \text{ و لذا } a \in \{7, 8, 9, 10\} \text{ چهار حالت دارد.}$$

$$b = 7, a - 7 \mid 14, \text{ پس } a - 7 \in \{1, 2, 7, 14\} \text{ و لذا } a \in \{8, 9\} \text{ دو حالت دارد.}$$

$$b = 8, a - 8 \mid 16, \text{ پس } a - 8 \in \{1, 2, 4, 8, 16\} \text{ و لذا } a \in \{9, 10\} \text{ دو حالت دارد.}$$

$$b = 9, a - 9 \mid 18, \text{ پس } a - 9 \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} \text{ و لذا } a \in \{10\} \text{ یک حالت دارد.}$$

$$b = 10, a - 10 \mid 20, \text{ پس } a - 10 \in \{1, 2, 4, 5, 10, 20\} \text{ که چنین حالتی برای } a \text{ امکان ندارد.}$$

پس در کل به $24 = 1 + 2 + 2 + 4 + 3 + 3 + 4 + 3 + 3 + 2 + 3 + 2$ حالت می‌توان این دو عدد را انتخاب کرد.

۷. گزینه‌ی (د) صحیح است.

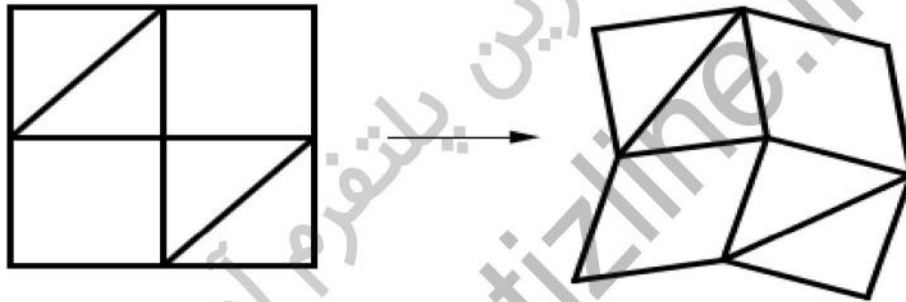
ابتدا توجه کنید که مثلث‌ها نمی‌توانند تغییر شکل بدهند و در نتیجه زوایای درون هر مثلث ثابت هستند. از طرف دیگر اگر در یک لولا زاویه‌ی لولا ثابت باشد، با استفاده از قواعد هم‌نهستی مثلث‌ها می‌توان نشان داد

آکادمی آموزشی تیزلاین <

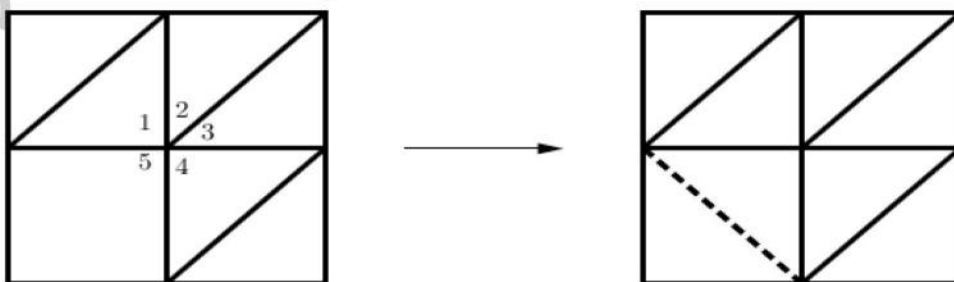
که کل لولا باید ثابت بماند، پس می‌توان ضلع مقابل لولا را اضافه کرد، طوری که در انعطاف‌پذیری شکل تغییری ایجاد نشود. یعنی در شکل زیر اگر α ثابت باشد، می‌توان چوبی در روبه‌روی این زاویه α اضافه کرد، به گونه‌ای که به صورت سمت راست در آید.



توجه کنید که سومین شکل (از سمت راست) را می‌توان با حرکت دادن به صورت زیر تغییر داد. پس سه شکل اول قابل انعطاف هستند.



اما در شکل چهارم با توجه به توضیحات بالا که مثلث‌ها ثابت هستند، زاویه‌های شماره‌ی ۱، ۲، ۳ و ۴ ثابت هستند. بنابراین زاویه‌ی ۵ هم باید ثابت باشد. پس با توجه به توضیحات بالا می‌توان تکه‌چوبی را بدون تغییر در انعطاف‌پذیری به شکل اضافه کرد طوری که همه‌ی چندضلعی‌های شکل مثلث شوند و به این ترتیب شکل غیرقابل انعطاف است.



پس در کل سه تا از شکل‌ها می‌توانند تغییر کنند.

۸. گزینه ی (ه) صحیح است.

با توجه به نامساوی حسابی، هندسی می‌دانیم که $a^2 + b^2 = |a|^2 + |b|^2 \geq 2|ab|$ پس ناحیه ی مورد سؤال زیرمجموعه ی $\{(x, y) : |y| < \frac{x}{4}\}$ است. از طرف دیگر اگر $x = \sqrt{a} \cdot \sin \theta$ و $y = \sqrt{a} \cdot \cos \theta$ باشد، $(x^2 + y^2, xy) = (a, \frac{1}{4} a \sin(2\theta))$ و $\frac{1}{4} a \sin(2\theta)$ برای مقادیر مختلف θ ، کل بازه ی $[-\frac{a}{4}, \frac{a}{4}]$ را می‌پوشاند. پس در کل مجموعه ی مورد نظر، $\{(x, y) : |y| < \frac{x}{4}\}$ است.

۹. گزینه ی (ب) صحیح است.

فرض کنید بعد از گذشت n ثانیه ملخ خورده شود. اگر وزغ بعد از خوردن ملخ به جای این که سر جای خود بایستد، با همان حرکت‌های ملخ خود را به جای نخستین ملخ برساند، n حرکت قبل از خوردن ملخ انجام داده و بعد از خوردن او هم n حرکت دیگر انجام داده است، پس در کل $2n$ حرکت کرده است. بالعکس اگر وزغ با $2n$ حرکت ۲ متر را طی کند، می‌توان n حرکت اول را حرکات وزغ و n حرکت بعدی را برعکس حرکات ملخ در نظر گرفت. در واقع ما تناظری بین تعداد راه‌های خورده شدن ملخ توسط وزغ و راه طی کردن مسیر ۲ متر با تعداد زوجی حرکت توسط وزغ برقرار کرده‌ایم. پس باید تعداد زوج حرکت‌هایی را بشماریم که وزغ در آن ۲ متر به جلو می‌رود. اگر به جای ۲۵ و ۵۰ سانتی‌متر، طول حرکات را ۱ و ۲ و کل مسیر را ۸ بگیریم، باید تعداد زوج حرکت‌هایی را بشماریم که در آن ۸ واحد طی می‌شود. تعریف می‌کنیم:

$O_n =$ تعداد فرد حرکت‌هایی که در آن n واحد طی می‌شود.

$E_n =$ تعداد زوج حرکت‌هایی که در آن n واحد طی می‌شود.

با توجه به حرکات وزغ که در هر مرحله یک یا دو واحد طی می‌کند به روابط بازگشتی زیر می‌رسیم:

$$E_{n+1} = O_n + O_{n-1}$$

$$O_{n+1} = E_n + E_{n-1}$$

و هدف یافتن E_8 است. به کمک جدول زیر و با توجه به این که $E_1 = 0$ و $E_2 = 1$ و $O_1 = 1$ و $O_2 = 1$ این محاسبه را انجام می‌دهیم.

n	۱	2	3	4	5	6	7	8
O_n	1	1	1	3	4	6	11	17
E_n	0	1	2	2	4	7	10	17

پس پاسخ عدد ۱۷ است.

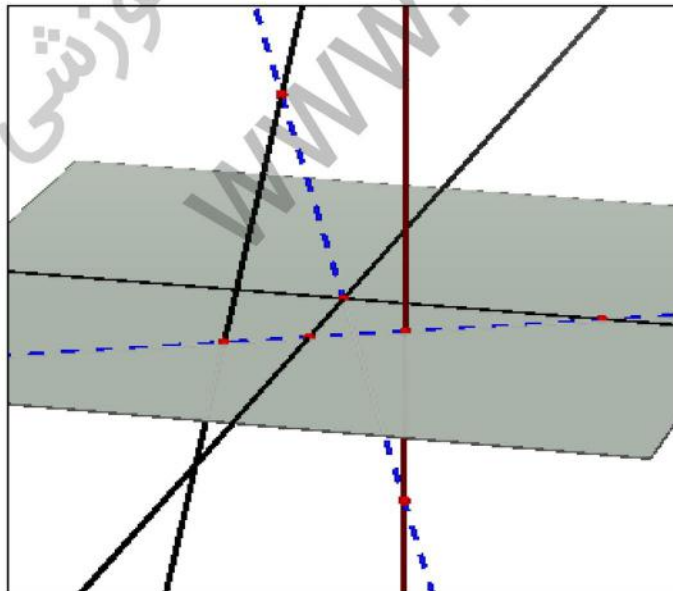
۱۰. گزینه ی (ب) صحیح است.

فرض کنید l_1, l_2, l_3, l_4 و l_4 خط صورت سؤال باشند که l_1 و l_2 در نقطه ی P متقاطع هستند. اگر خط l هر چهار خط را قطع کند با توجه به این که l_1 و l_2 را هم قطع می کند یا باید از نقطه ی P بگذرد یا در صفحه ی شامل l_1 و l_2 که صفحه ای یک تاست قرار دارد.

اگر چنین خطی که از نقطه ی P می گذرد موجود باشد، خطی یک تاست زیرا در غیر این صورت اگر l و l' دو خط با این خاصیت باشند، با توجه به این که هر دو شامل نقطه ی P هستند در یک صفحه قرار می گیرند و چون l_1 و l_2 با هر دو خط تقاطع دارند، آن ها نیز باید در همین صفحه باشند که در این صورت باید با هم متقاطع یا موازی باشند که خلاف فرض ماست.

اگر چنین خطی با در صفحه ی شامل l_1 و l_2 باشد، از آن جا که اشتراک این صفحه با l_3 و l_4 حداکثر در یک نقطه است. (اگر بیش تر از یک نقطه اشتراک داشته باشد کل خط باید در این صفحه باشد که باعث می شود با l_1 و l_2 موازی و یا متقاطع شود که خلاف فرض است.) پس باید خط l از این دو نقطه بگذرد و بنابراین خط مورد نظر در این حالت هم یک تا است.

پس در کل حداکثر دو خط می توان داشت. می توان مطابق شکل زیر خط ها را با توجه توضیحات بالا به گونه ای طراحی کرد که دو خط متقاطع با هر چهار تایی آن ها موجود باشند. (خطوط قطعه قطعه دو خط مورد نظر هستند.)



۱۱. گزینه‌ی (ب) صحیح است.

فرض کنید x و y دو عدد حقیقی باشند که $xy^2 + 4x^2y + 5 = 0$ و $x > 0$ ، در این صورت $y < 0$ زیرا اگر $y \geq 0$ ، $xy^2 + 4x^2y + 5 > 0$ که به وضوح تناقض است. حال دقت کنید که

$$xy^2 + 4x^2y + 5 = 0 \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 4\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{-5}{x^3} < 0 \Rightarrow \left(\frac{y}{x} + 4\right)\left(\frac{y}{x}\right) < 0.$$

حال چون $\frac{y}{x} < 0$ ، $\frac{y}{x} + 4 > 0$ و معادلاً $y > -4x$ پس $a \geq -4$.

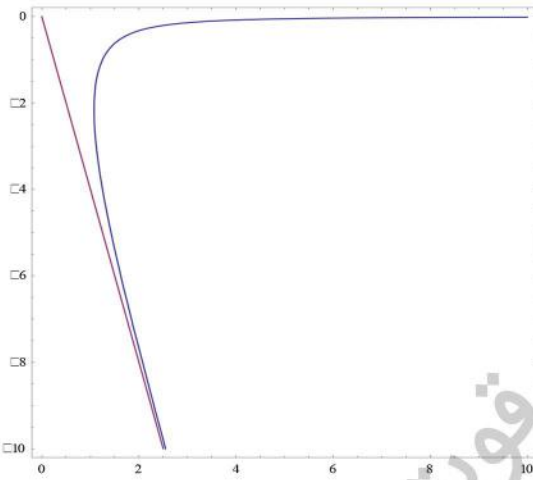
حال ادعا می‌کنیم $a = -4$. برای این منظور نشان می‌دهیم برای هر $-4 < a < 0$ می‌توان $x \in \mathbb{R}^+$ و $y \in \mathbb{R}^-$ یافت که $(*)$ $xy^2 + 4x^2y + 5 = 0$ و ضمناً $y = ax$.

اگر $y = ax$ را در رابطه‌ی $(*)$ جای‌گزین کنیم، داریم:

$$a^2x^3 + 4ax^3 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^3 = \frac{-5}{a(4+a)} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{-5}{a(4+a)}}$$

که چون $-4 < a < 0$ ، عدد x که در بالا به دست آمده مثبت است و زوج x و $y = ax$ در رابطه‌ی $(*)$ صدق می‌کنند. پس بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای a همان -4 است.

توضیح: در شکل زیر مجموعه نقاطی در ناحیه‌ی چهارم مختصات که در رابطه‌ی $(*)$ صدق می‌کنند و هم‌چنین نمودار خط $y = -4x$ را می‌بینید. همان‌طور که مشاهده می‌کنید تمام نمودار در این ناحیه در بالای این خط قرار دارد.



۱۲. گزینه‌ی (الف) صحیح است.

طبق رابطه‌ی صورت سؤال $x + y = z(xy - 2)$ و چون x و y و z طبیعی و در نتیجه مثبت هستند، $xy - 2$ هم طبیعی است و به علاوه $(*) \quad xy - 2 \mid x + y$ و لذا $xy - 2 \leq x + y$ ادعا می‌کنیم

که یکی از x و y کمتر از ۳ است. به برهان خلف فرض کنید $x, y \geq 3$. حال داریم:

$$xy - 2 \leq x + y \Rightarrow xy - x - y \leq 2 \Rightarrow (x - 1)(y - 1) = xy - x - y + 1 \leq 2$$

که رابطه‌ی آخر با توجه به این که $x - 1 \geq 2$ و $y - 1 \geq 2$ امکان ندارد.

حال مسئله را بر حسب x و y حالت‌بندی می‌کنیم.

حالت اول. $x = 1$. طبق $(*)$ باید $y + 1 \mid y - 2$ ، معادلاً $3 \mid y - 2$ و لذا $y - 2 \in \{-3, -1, 1, 3\}$. این حالت در نهایت با توجه به طبیعی بودن x و y و $xy - 2$ منجر به جواب‌های $(1, 3, 4)$ و $(1, 5, 2)$ می‌شود. (منظور از سه‌تایی $(1, 5, 2)$ ، $x = 1$ ، $y = 5$ و $z = 2$ است!)

حالت دوم. $x = 2$. در این حالت طبق رابطه‌ی $(*)$ باید $2 \mid y + 2$ که این نتیجه می‌دهد $2 \mid (2y - 2) - 2(y + 2)$ و لذا $3 \mid y - 1$. بنابراین $y - 1 \in \{-3, -1, 1, 3\}$. این حالت در نهایت توجه به طبیعی بودن x و y و $xy - 2$ منجر به جواب‌های $(2, 2, 2)$ و $(2, 4, 1)$ می‌شود.

حالت سوم. $y = 1$. کاملاً شبیه حالت اول به جواب‌های $(3, 1, 4)$ و $(5, 1, 2)$ منجر می‌شود. (دقت کنید که به دلیل تقارن رابطه‌ی صورت سؤال نسبت به x و y اگر (x, y, z) جواب باشد، (y, x, z) هم جواب است.)

حالت چهارم. $y = 2$. این حالت هم مشابه حالت دوم به $(2, 2, 2)$ و $(4, 2, 1)$ منجر می‌شود که جواب $(2, 2, 2)$ تکراری است. پس در کل مسئله ۷ جواب دارد.

۱۳. گزینه ی (ج) صحیح است.

یک برنامه‌ریزی غذایی برای تعدادی روز در رستوران را "متنوع" می‌نامیم اگر غذای هر دو روز متوالی متفاوت باشد. حال a_n را تعداد روش‌های مختلف برنامه‌ریزی متنوع برای n روز در نظر بگیرید با این شرط که غذای روز اول و آخر نیز متفاوت باشد. به همین ترتیب b_n را تعداد روش‌های مختلف برنامه‌ریزی متنوع رستوران برای n روز در نظر بگیرید با این شرط که غذای روز اول و آخر یکسان باشد. با این ادبیات هدف ما در مسئله یافتن a_7 است.

دقت کنید که اگر یک برنامه‌ریزی متنوع برای n روز داشته باشیم که غذای روز اول و آخر آن یکسان باشد، با حذف روز n ام از برنامه به یک برنامه‌ریزی متنوع برای $n - 1$ روز می‌رسیم که غذای روز اول و آخر آن متفاوت است. یعنی $b_n = a_{n-1}$.

از طرف دیگر $a_n + b_n$ تعداد کل روش‌های برنامه‌ریزی متنوع برای رستوران است (با این تفاوت که هیچ رابطه‌ای بین غذای روز اول و آخر نداریم). در یک برنامه‌ریزی متنوع n روزه، برای انتخاب غذای روز اول سه حالت داریم. بعد از انتخاب غذای روز اول، برای انتخاب غذای روزهای بعد هر کدام ۲ حالت خواهیم داشت (غذای هر روز باید با غذای روز قبش متفاوت باشد). پس تعداد کل چنین برنامه‌ریزی‌هایی $a_n + b_n = 3 \times 2^{n-1}$ است و این یعنی $a_n + b_n = 3 \times 2^{n-1}$ حال داریم:

$$a_n + b_n = 3 \times 2^{n-1} \Rightarrow a_n = 3 \times 2^{n-1} - a_{n-1}$$

$$a_n = 3 \times 2^{n-1} - (3 \times 2^{n-2} - a_{n-2}) = 3 \times 2^{n-2} + a_{n-2}$$

با توجه به این رابطه‌ی بازگشتی برای a_7 داریم:

$$a_7 = 3 \times 2^5 + a_5 = 3 \times (2^5 + 2^3) + a_3 = 3 \times (2^5 + 2^3 + 2^1) + a_1$$

که $a_1 = 0$ (در برنامه‌ریزی برای یک روز حتماً غذای روز اول و آخر یکی می‌شود!) و در نتیجه $a_7 = 3 \times 42 = 126$.

۱۴. گزینه ی (ج) صحیح است.

با جمع و تفریق کردن دو رابطه به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x^2 + y = xy^2 \\ y^2 + x = yx^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + (x+y)(1-xy) = 0 \quad (I) \\ x^2 - y^2 + (x-y)(xy-1) = 0 \quad (II) \end{cases}$$

با استفاده از (II) خواهیم داشت:

$$(x-y)(x+y+xy-1) = 0$$

پس $x = y$ و یا $x + y = 1 - xy$. اگر $x + y = 1 - xy$ با توجه به (I) باید داشته باشیم

$$x^2 + y^2 + (x+y)^2 = 0$$

پس در هر صورت $x = y$:

$$x = y \Rightarrow x + x^2 = x^3 \Rightarrow x(x^2 - x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

پس دست‌گاه معادلات، ۳ جواب حقیقی دارد.

۱۵. گزینه‌ی (د) صحیح است.

دوره سالانه

نخفیف ویژه
برای تیزلاینی ها

آکادمی تیزلاین

برگزاری می کند:



دکتر میثم کوهگرد

کلاس آنلاین المپیاد
فیزیک (سطح یک)

پنجشنبه‌ها ۱۵:۱۸ تا ۱۹:۳۰

شروع از ۲۷ آبان

۵ جلسه
۶۰۰ هزار تومان



دکتر افشین بهرام

کلاس آنلاین المپیاد
ریاضی (سطح یک)

یکشنبه‌ها ۲۰:۱۵ تا ۲۱:۱۵

شروع از ۲۳ آبان

۵ جلسه
۶۰۰ هزار تومان



دکتر رضاحمت الهزاده

کلاس آنلاین المپیاد
شیمی (سطح یک)

شنبه‌ها ۲۰:۱۵ تا ۲۱:۱۵

شروع از ۲۲ آبان

۵ جلسه
۶۰۰ هزار تومان



دکتر قربانی

کلاس آنلاین المپیاد
زیست شناسی (سطح دو)

سه شنبه‌ها ۲۰:۱۵ تا ۲۱:۱۵

شروع از ۲۵ آبان

۲۰ جلسه
۸۰۰ هزار تومان



دکتر میثم کوهگرد

کلاس آنلاین المپیاد
فیزیک (سطح دو)

پنجشنبه‌ها ۲۰:۱۵ تا ۲۱:۱۵

شروع از ۲۷ آبان

۲۰ جلسه
۸۰۰ هزار تومان



دکتر قربانی

کلاس آنلاین المپیاد
زیست شناسی (سطح یک)

سه شنبه‌ها ۱۵:۱۸ تا ۱۹:۳۰

شروع از ۲۵ آبان

۵ جلسه
۶۰۰ هزار تومان

#تیزلاینی_شو

ثبت نام در سایت رسمی



tizline.ir

www.tizline.ir



۰۲۱-۹۱۳۰۲۲۰۲



۰۲۰۲ ۳۸۴-۰۹۳۳

تقویم آموزشی آکادمی تیزلاین

سال ۱۴۰۱-۱۴۰۰

#تیزلاینی_شو

**ترم دو
دوره
سالانه**

آغاز ثبت نام: ۱ دی

شروع دوره: ۱ بهمن

پایان دوره: ۲۵ اردیبهشت

۱۵ جلسه

**ترم یک
دوره
سالانه**

آغاز ثبت نام: ۱ شهریور

شروع دوره: ۱۰ مهر

پایان دوره: ۱۸ دی

۱۵ جلسه

**ترم
تابستان**

آغاز ثبت نام: ۱۰ خرداد

شروع دوره: ۱۲ تیر

پایان دوره: ۲۰ شهریور

۱۰ جلسه

آنلاین تخصص ماست

کلاس ، آزمون ، مشاوره ، تکلیف

ثبت نام در سایت رسمی آکادمی تیزلاین www.Tizline.ir

آزمون های هماهنگ از ۲۵ مهر تا ۱۱ اردیبهشت