به نام او

آزمون میان‌ترم جبر

دوره تابستانی المپیاد ریاضی، مرداد ۱۳۹۸ — مدت زمان آزمون: ۵ ساعت

۱. a، b و c اعداد حقیقی مثبتی هستند که $\sum_{cyc}(a+b)^2 = 2\sum a + 6abc$. ثابت کنید

$$\sum_{cyc}(a-b)^2 \leq \left|2\sum a - 6abc\right|.$$

۲. تمام توابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را بیابید که اگر a، b و c سه عدد حقیقی باشند که $a+f(b)+f(f(c))=0$، آن‌گاه

$$f(a)^3 + bf(b)^2 + c^2f(c) = 3abc$$

۳. عدد طبیعی d داده شده است. همه‌ی بازه‌های باز $I \subseteq \mathbb{R}$ از بیش‌ترین طول را بیابید که برای هر انتخاب $a_0, a_1, \ldots, a_{2d-1}$ از اعضای I، چندجمله‌ای $P(x) = x^{2d} + a_{2d-1}x^{2d-1} + \cdots + a_1x + a_0$ ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد.

موفق باشید.

به نام خدا

آزمون المپیاد ریاضی

شنبه، ۵ مرداد ۱۳۹۸ | امتحان ترکیبیات | زمان: پنج ساعت

۱. حسنا یک شبکه $m \times n$ از نقاط در اختیار دارد. وی تحت شرایط زیر می‌تواند بین برخی از این نقاط، پاره‌خط‌هایی را رسم کند.

- دو سر هر پاره‌خط متعلق به نقاط دو سطر متوالی باشد (یعنی اگر نقطه A را به نقطه B وصل می‌کنیم باید iای وجود داشته‌باشد به‌طوری‌که نقاط A و B به ترتیب متعلق به سطرهای i و $i+1$ باشد).
- هیچ دو پاره‌خطی به جز در نقاط شبکه‌ای متقاطع نباشند.
- بین هر دو نقطه‌ای حداکثر یک پاره‌خط رسم شود.

حداکثر تعداد ناحیه‌هایی را که با رسم این پاره‌خط‌ها می‌توان به‌وجود آورد را بیابید.

۲. فرض کنید n , k اعدادی طبیعی هستند به طوری $1 \le k \le n$. m رشته دودویی به طول n با نام های $r_1, r_2, \dots, r_m$ داریم به طوری که برای هر k اندیس دلخواه $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$ ، اگر m زیررشته‌ی دودویی با این اندیس‌ها را از $r_1, r_2, \dots, r_m$ درنظر بگیریم شامل تمامی 2^k رشته مختلف دودویی نیست. حداکثر مقدار ممکن برای m را بیابید.

۳. خانه‌های یک جدول $n \times n$ با اعداد طبیعی به صورتی پر شده‌است که در خانه ی واقع در تقاطع ستون iام و سطر jام عدد $i+j$ نوشته شده‌است. در هر مرحله می‌توانیم دو زیرمستطیل با طول n وکاملا هم‌اندازه و بدون اشتراک از این جدول انتخاب کرده و جایشان را باهم عوض کنیم (بدون اینکه آن‌هارا بچرخانیم یا آینه کنیم). می‌خواهیم در نهایت جدولی داشته‌باشیم که در خانه‌ی واقع در تقاطع ستون iام و سطر jام عدد $2n - (i+j)$ نوشته‌شده‌باشد. کم‌ترین تعداد حرکات مورد نیاز برای رسیدن به این هدف را بیابید.

۵	۶	۷	۸
۴	۵	۶	۷
۳	۴	۵	۶
۲	۳	۴	۵

$\Rightarrow$

۵	۴	۳	۲
۶	۵	۴	۳
۷	۶	۵	۴
۸	۷	۶	۵

موفق باشید!

به نام او

آزمون میان‌ترم هندسه

دوره تابستانی المپیاد ریاضی، مرداد ۹۸ — مدت زمان آزمون: ۵ ساعت

۱. در چهارضلعی محاطی $ABCD$ عمودی که از A بر AB و عمودی که از D بر CD رسم می‌شوند در نقطهٔ P روی ضلع BC همرس‌اند. محل برخورد میانهٔ رئوس A و D در مثلث‌های BAP و CDP را K و محل برخورد نیمساز رئوس A و D در مثلث‌های BAP و CDP را L می‌نامیم. ثابت کنید KL بر BC عمود است.

۲. در مثلث حاده‌زاویهٔ ABC می‌دانیم $AB = AC$ و $\angle A > 60^\circ$. نقطهٔ O مرکز دایره محیطی است. از B موازی AC رسم می‌کنیم تا دایره محیطی BOC را برای بار دوم در P قطع کند. نقطه K را روی پاره‌خط AP انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که $BK = BC$. ثابت کنید CK از وسط کمان $\widehat{BC}$ (کمانی که شامل O نیست) در دایره محیطی مثلث BOC می‌گذرد.

۳. مثلث ABC با مرکز دایره محیطی O و مرکز دایره محاطی داخلی I مفروض است. دایره محاطی داخلی به‌ترتیب در D، E و F بر اضلاع BC، CA و AB مماس است. از F بر دایره محیطی BFD و از E بر دایره محیطی CED مماس رسم می‌کنیم تا یک‌دیگر را در K قطع کنند. ثابت کنید AK، OI و BC همرس‌اند.

موفق باشید!

به نام او

آزمون میان‌ترم نظریه اعداد

دوره تابستانی المپیاد ریاضی، مرداد ۹۸ — مدت زمان آزمون: ۵ ساعت

۱. $k \in \mathbb{N}$ عددی ثابت است. $a_0, a_1, \dots$ و $b_0, b_1, \dots$ دو دنباله نامتناهی از اعداد بین $1, 2, \dots, 9$ هستند. می‌دانیم برای هر $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_0} + k \mid \overline{b_n b_{n-1} \dots b_0} + k$$

ثابت کنید عدد طبیعی $1 \leq t \leq 9$ و $N \in \mathbb{N}$ موجود است که برای هر عدد طبیعی $n \geq N$ داشته باشیم:

$$b_n = t a_n$$

۲. ثابت کنید برای هر $m > n$ طبیعی، نامتناهی $a, b \in \mathbb{N}$ موجود است که مجموعه عوامل اول $a^m + b^n$ برابر با مجموعه عوامل اول $a^{2019} + b^{1398}$ باشد.

۳. S زیرمجموعه‌ای نامتناهی از اعداد طبیعی است. تعریف می‌کنیم:

$$T = \{x + y | x, y \in S, x \neq y\}$$

می‌دانیم تنها متناهی عدد اول p موجود است که

$$\begin{cases} p \overset{4}{\equiv} 1 \\ \exists t \in T : p \mid t \end{cases}$$

ثابت کنید نامتناهی عدد اول q موجود است که

$$\exists s \in S : q \mid s$$

موفق باشید!

به نام او

آزمون پایان‌ترم جبر

دوره تابستانی المپیاد ریاضی، مرداد ۱۳۹۸ — مدت زمان آزمون: ۵ ساعت

۱. فرض کنید $k \geq ۳$ یک عدد طبیعی و $A_۱, A_۲, \dots, A_k$ تعدادی نقطه متمایز روی دایره واحد در صفحه باشند. ثابت کنید

$$\sum_{۱ \leq i < j \leq k} |A_i - A_j|^۲ \leq k^۲$$

(منظور از $|A_i - A_j|$ فاصله دو نقطه A_i و A_j در صفحه است.)

۲. $P(x)$ یک چندجمله‌ای تکین با ضرایب صحیح از درجه حداقل یک است. فرض کنید $P_۱(x), \dots, P_n(x)$ نیز چندجمله‌ای‌هایی تکین با ضرایب صحیح باشند که برای هر $۱ \leq i \leq n$، $\deg(P_i) \geq \deg(P)$. به علاوه می‌دانیم برای هر عدد طبیعی x، می‌توان عدد طبیعی y و اندیس i ($۱ \leq i \leq n$) یافت که $P(x) = P_i(y)$. ثابت کنید اندیس $۱ \leq j \leq n$ و عدد صحیح k وجود دارد که $P(x) = P_j(x+k)$.

۳. a، b و c اعدادی حقیقی ناصفر و متمایز هستند که برای آن‌ها توابع $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ وجود دارد که تساوی

$$af(xy) + bf(\frac{x}{y}) = cf(x) + g(y)$$

برای هر مقدار حقیقی به اندازه کافی بزرگ y و هر مقدار حقیقی مثبت x برقرار باشد. ثابت کنید تابع $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ وجود دارد که برای هر مقدار به اندازه کافی بزرگ y و هر مقدار مثبت x،

$$f(xy) + f(\frac{x}{y}) = ۲f(x) + h(y)$$

موفق باشید.

به نام خدا

آزمون المپیاد ریاضی

یکشنبه،۲۷ مرداد ۱۳۹۸ | امتحان ترکیبیات | زمان: پنج ساعت

۱. یک خرس در یک جدول ۱۰۰×۱۰۰ در خانه (۱و۱) وجود دارد. ایشان پس از طی کردن یک دور خرسی(همیلتونی خودمون!)، به خانه اولیه بازگشته است به طوری که هر خانه را دقیقا یک بار دیده باشد. کمترین مقدار k را بیابید به طوری که مطمئن باشیم به ازای هر دور خرسی این خرس، یک سطر یا ستونی وجود دارد به طوری که پس از حذف آن، مسیری به طول بزرگتر از k وجود نداشته باشد. (پس از اینکه یک ستون یا سطر را حذف می‌کنیم، دور ما به تعدادی مسیر تبدیل میشود. ضمنا طول هر مسیر برابر است با تعداد یال های آن مسیر)

۲. P یک ۱۰۰ضلعی محدب است، به ازای هر مثلث بندی T از P تعریف میکنیم $P(T)$ یک ۱۰۰ضلعی همنهشت با P است به طوری‌که قطر های آن اینگونه رسم شده اند که به ازای هر چهارضلعی با چهار ضلع و یک قطر مرسوم در مثلث بندی T، قطر دیگر آن چهارضلعی در $P(T)$ رسم شده است. فرض کنید $f(T)$ تعداد جفت قطر هایی در $P(T)$ است که در درون یکدیگر را قطع میکنند(تقاطع نقاط انتهایی محسوب نیست). بیشینه و کمینه $f(T)$ را بیابید.

۳. $2n$ تا خط قرمز و n تا خط آبی در صفحه در حالت عمومی وجود دارند ، ثابت کنید حداقل $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ تا ناحیه با محیط تک‌رنگ وجود دارد.(هر ناحیه‌ی بی‌کران هم یک ناحیه محسوب میشود که تعدادی پاره‌خط و نیم‌خط محیط آن را تشکیل داده است.)

موفق‌باشید!

به نام او

آزمون پایان‌ترم هندسه

دوره تابستانی المپیاد ریاضی، مرداد ۹۸ مدت زمان آزمون: ۵ ساعت

۱. مثلث ABC با مرکز دایره محاطی I مفروض است. محل برخورد BI و AC را D و محل برخورد CI و دایره محیطی مثلث ABC را M می‌نامیم. از I بر AI عمود می‌کنیم تا خط MD را در K قطع کند. اگر F قرینه B نسبت به C باشد ثابت کنید چهارضلعی $BIKF$ محاطی است.

۲. در مثلث حاده‌زاویه ABC ارتفاع‌های BE و CF در H متقاطع‌اند. عمود از H بر EF کمان BC از دایره محیطی مثلث ABC (کمانی که شامل راس A نیست) را در K قطع می‌کند. خطوط AK و BC در P متقاطع‌اند. ثابت کنید $PK = PH$.

۳. پنج‌ضلعی محاطی $ABCDE$ با دایره محیطی Γ داده شده است. خط ℓ از راس A می‌گذرد و بر Γ مماس است. نقاط X و Y روی ℓ قرار دارند به‌طوری‌که A بین X و Y قرار دارد. دایره محیطی مثلث XED پاره‌خط AD را در Q و دایره محیطی مثلث YBC پاره‌خط AC را در P قطع می‌کند. خطوط XE و YB در S و خطوط XQ و YP در Z متقاطع‌اند. ثابت کنید دایره محیطی مثلث‌های XYZ و BES بر هم مماس‌اند.

موفق باشید!

به نام او

آزمون پایان‌ترم نظریه اعداد

دوره تابستانی المپیاد ریاضی، مرداد ۹۸ مدت زمان آزمون: ۵ ساعت

۱. همه توابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ را بیابید که برای هر سه عدد طبیعی متمایز x, y, z:

$x+y+z$ مربع کامل شود اگر و فقط اگر $f(x)+f(y)+f(z)$ مربع کامل شود.

۲. گوییم $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ $(a_i \in \mathbb{Z})$ اولیه است هرگاه $p(x)$ متحد با ۰ نباشد و $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0) = 1$.

الف) S زیرمجموعه‌ای متناهی از اعداد اول بیش‌تر از ۱۳۹۸ است. ثابت کنید برای هر $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ اولیه با درجه کم‌تر از ۱۳۹۸، $n \in \mathbb{N}$ موجود است به‌طوری‌که $p(n)$ بر هیچ‌یک از اعضای S بخش‌پذیر نباشد.

ب) S زیرمجموعه‌ای از اعداد اول کم‌تر از ۱۳۹۸ است. ثابت کنید $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ اولیه از درجه کم‌تر از ۱۳۹۸ موجود است به‌طوری‌که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $p(n)$ بر همه اعضای S بخش‌پذیر باشد.

۳. $m > 2$ عددی طبیعی است. فرض کنید $a \in \mathbb{N}$، $(a,m) = 1$ و $\mathrm{ord}_m(a)$ فرد است. می‌دانیم برای هر x, y طبیعی که:

$$\begin{cases} xy \overset{m}{\equiv} a \\ \mathrm{ord}_m(x) \le \mathrm{ord}_m(a) \\ \mathrm{ord}_m(y) \le \mathrm{ord}_m(a) \end{cases}$$

داریم

$$\mathrm{ord}_m(x) \mid \mathrm{ord}_m(a) \quad \text{یا} \quad \mathrm{ord}_m(y) \mid \mathrm{ord}_m(a)$$

ثابت کنید $\mathrm{ord}_m(a)$ حداکثر یک عامل اول دارد. (منظور از $\mathrm{ord}_m(a)$ مرتبه a به پیمانه m است.)

۱. a، b و c اعداد حقیقی مثبتی هستند که $\sum_{cyc}(a+b)^۲ = ۲\sum a + ۶abc$. ثابت کنید

$$\sum_{cyc}(a-b)^۲ \leq |۲\sum a - ۶abc|.$$

راه‌حل. لم. اگر A، B، C و D اعداد حقیقی مثبتی باشند که $A+B=C+D$. در این صورت $AB \leq CD$ اگر و تنها اگر $|C-D| \leq |A-B|$.

اثبات لم. به سادگی می‌دانیم

$$|C-D| \leq |A-B| \Leftrightarrow (C-D)^۲ \leq (A-B)^۲ \Leftrightarrow (C+D)^۲ - ۴CD \leq (A+B)^۲ - ۴AB$$

و عبارت آخر با توجه به این که $A+B=C+D$ معادل این است که $AB \leq CD$.

حال در صورت مسئله اصلی قرار می‌دهیم، $A = ۳abc$، $B = \sum a$، $C = \sum a^۲$ و $D = \sum ab$.
طبق فرض صورت سوال می‌دانیم $A+B=C+D$. حال نشان می‌دهیم $AB \leq CD$ یا معادلاً

$$۳abc\sum a \leq \left(\sum a^۲\right)\left(\sum ab\right).$$

این نابرابری را به روش‌های مختلف می‌توان نشان داد. برای مثال

$$۳\left(\sum a^۲\right)\left(\sum ab\right) \geq \left(\sum a\right)^۲\left(\sum ab\right) \geq \left(\sum a\right)\left(۳\sqrt[۳]{abc}\right)\left(۳\sqrt[۳]{a^۲b^۲c^۲}\right).$$

و عبارت مورد نظر نتیجه می‌شود. حال طبق لم داریم

$$|\sum a^۲ - \sum ab| \leq |\sum a - ۳abc|.$$

با ضرب کردن طرفین در ۲ و توجه به این نکته که $۲\sum a^۲ - ۲\sum ab = \sum(a-b)^۲$ حکم نهایی سوال نتیجه می‌شود. $\square$

۲. تمام توابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را بیابید که اگر a، b و c سه عدد حقیقی باشند که $a+f(b)+f(f(c))=0$، آن‌گاه

$$f(a)^3+bf(b)^2+c^2f(c)=3abc$$

راه‌حل. اولاً تابع ثابت صفر در حکم مسئله صدق می‌کند. چرا که اگر a، b و c در شرط مسئله صدق کنند، a باید برابر صفر باشد و لذا تساوی برقرار است. حال فرض کنید تابع ثابت صفر نیست. ثابت می‌کنیم در این حالت حتماً f تابعی یک به یک است.

به برهان خلف فرض کنید دو عدد حقیقی متفاوت x و y موجود باشند که $f(x)=f(y)=\alpha$. در این صورت در فرض و حکم مسئله یک بار به جای c مقدار x و بار دیگر مقدار y را قرار می‌دهیم.

$$a+f(b)+f(f(x))=0\Rightarrow f(a)^3+bf(b)^2+x^2f(x)=3abx,$$

$$a+f(b)+f(f(y))=0\Rightarrow f(a)^3+bf(b)^2+y^2f(y)=3aby,$$

با کم کردن دو عبارت از هم داریم:

$$(x^2-y^2)\alpha=3ab(x-y).$$

و چون x و y نابرابر فرض شده اند، نتیجه می‌گیریم که برای هر a و b که در تساوی $a+f(b)+f(\alpha)=0$ صدق کنند

$$(x+y)\alpha=3ab,\qquad(*)$$

. یک بار b را برابر صفر و a را برابر $-f(b)-f(\alpha)$ قرار می‌دهیم که $(*)$ نتیجه می‌دهد $(x+y)\alpha=0$ است.

حال اگر b را ناصفر و $a=-f(b)-f(\alpha)$ بگیریم باید حتماً a برابر صفر باشد. یعنی برای مقادیر ناصفر b، f تابعی ثابت است.

حال در عبارت فرض سوال c را برابر صفر و b را مقداری ناصفر بگیرید. حال با قرار دادن $a=-f(b)-f(f(0))$ داریم

$$f(a)^3+bf(b)^2=0.$$

مقدار $f(a)^3$ نیز با تغییر b تغییر نمی‌کند. پس برای همه مقایر ناصفر b، $f(b)=0$ است و چون تابع فرض کردیم f متحد با صفر نیست، $f(0)\neq 0$.

اگر c را برابر صفر و b را ناصفر قرار دهیم، $0+f(b)+f(f(c))=0$. پس

$$f(0)^3+b\underbrace{f(b)^2}_{0}+0^2\times f(0)=0\Rightarrow f(0)=0$$

که تناقض است پس f یک به یک می‌باشد.

حال یک بار قرار دهید $b=c=0$ و $a=-f(0)-f(f(0))$. در این صورت نتیجه می‌شود $f(r)=0$ که $r=-f(0)-f(f(0))$.

سپس b را برابر r، c را برابر صفر و a را $-f(f(0))$ می‌گذاریم که نتیجه می‌دهد $f(-f(f(0))) = 0$.
با توجه به یک به یک بودن، نتیجه می‌گیریم $f(0)$ برابر صفر است.
یک بار با قرار دادن b برابر صفر و یک بار دیگر با قرار c برابر صفر نتیجه می‌گیریم

$$f(-f(b))^3 = -bf(b)^2, f(-f(f(c)))^3 = -c^2 f(c).$$

اگر در رابطه اول به جای b، $f(c)$ قرار دهیم و با عبارت دوم مقایسه کنیم

$$-f(c)f(f(c))^2 = -c^2 f(c).$$

پس $c^2 = f(f(c))^2$. حال در صورت سوال به جای b، $f(b)$ قرار می‌دهیم

$$a + f(f(b)) + f(f(c)) = 0 \Rightarrow f(a)^3 + f(b)b^2 + c^2 f(c) = 3af(b)c.$$

به دلیل تقارن سمت چپ، نتیجه می‌گیریم $af(b)c = abf(c)$. پس اگر $b \neq \pm c$ (که نتیجه می‌دهد a نمی‌تواند برابر صفر باشد) نتیجه می‌گیریم $f(b)c = bf(c)$. یعنی برای هر $b \neq -1$، $f(b) = bf(1)$ و برای هر $b \neq -2$، $f(b) = \frac{b}{2}f(2) = bf(1)$. پس f تابعی خطی است. حال چون $f(f(x))^2 = x^2$، $f(x) = x$ و یا $f(x) = -x$. به وضوح هر دو تابع به دلیل اتحاد اویلر در صورت مسئله صدق می‌کنند.

□

۳. عدد طبیعی d داده شده است. همه‌ی بازه‌های باز $I \subseteq \mathbb{R}$ از بیش‌ترین طول را بیابید که برای هر انتخاب $a_0, a_1, \dots, a_{2d-1}$ از اعضای I، چندجمله‌ای $P(x) = x^{2d} + a_{2d-1}x^{2d-1} + \dots + a_1x + a_0$ ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد.

راه‌حل. ادعا می‌کنیم جواب بازه‌ی $(1, 1 + \frac{1}{d})$ است.
فرض کنید (b, c) بازه‌ی مطلوب حکم مسئله باشد. در این صورت چون $P(x)$ درجه زوج است برای مقادیر به دل‌خواه بزرگ x مقدار چندجمله‌ای مثبت است. پس چون P ریشه ندارد باید مقدار آن همیشه مثبت باشد و به طور خاص $P(-1) > 0$.
برای دو عدد α و β در بازه (b, c)، ضرایب زوج چندجمله‌ای را برابر β و ضرایب فرد را برابر α قرار می‌دهیم. داریم

$$0 < P(-1) = 1 + d\beta - d\alpha.$$

پس $\alpha - \beta \le \frac{1}{d}$ و طول بازه حداکثر $\frac{1}{d}$ است. حال ادعا می‌کنیم تنها بازه $I = (1, 1 + \frac{1}{d})$ شرط مورد نظر را دارد. اگر بازه $(\alpha, \alpha + \frac{1}{d})$ واجد شرط مسئله باشد، برای هر $x = -t < 0$ باید مقدار تابع مثبت باشد. به خصوص اگر همه‌ی ضرایب زوج را نزدیک α و همه‌ی ضرایب فرد را نزدیک $\alpha + \frac{1}{d}$ انتخاب کنیم. پس با انتخاب ضرایب زوج برابر α و ضرایب زوج برابر $\alpha + \frac{1}{d}$ نیز مقدار تابع نامنفی است.

$$0 \le P(-t) = t^{2d} - (\alpha + \frac{1}{d})(t^{2d-1} + \dots + t^3 + t) + \alpha(t^{2d-2} + \dots + t^2 + 1).$$

عبارت بالا همیشه نامنفی است و برای $t = 1$ برابر صفر می‌شود. پس $t = 1$ باید ریشه مضاعف آن باشد که نتیجه می‌دهد که $\alpha = 1$ و بازه با طول $\frac{1}{d}$ باید بازه $(1, 1 + \frac{1}{d})$ باشد.
حال نشان می‌دهیم برای هر انتخاب ضرایب در این بازه، چندجمله‌ای ریشه منفی ندارد. به وضوح اگر ضرایب در این بازه انتخاب شوند، $P(x)$ ریشه مثبت ندارد. حال نشان می‌دهیم برای هر مقدار منفی x نیز $P(x)$ مثبت است. قرار دهید $x = -t < 0$.

$$P(t) > t^{2d} - (1 + \frac{1}{d})t^{2d-1} + t^{2d-2} - (1 + \frac{1}{d})t^{2d-3} + \dots - (1 + \frac{1}{d})t + 1.$$

پس کافی است نشان دهیم که سمت راست عبارت بالا مثبت است یا معادلاً

$$\frac{t^{2d} + t^{2d-2} + \dots + t^2 + 1}{d+1} \ge \frac{t^{2d-1} + t^{2d-3} + \dots + t^3 + t}{d}.$$

که چون $t^{2d} + 1 \ge t^{2d-2k+1} + t^{2k-1}$ و $t^{2k} + t^{2k-2} \ge 2t^{2k-1}$ این نیز برقرار است.

$\square$

موفق باشید.

به نام او

آزمون پایان‌ترم جبر

دوره تابستانی المپیاد ریاضی، مرداد ۱۳۹۸ — مدت زمان آزمون: ۵ ساعت

---

۱. فرض کنید $k \geq ۳$ یک عدد طبیعی و $A_۱, A_۲, \ldots, A_k$ تعدادی نقطه روی دایره واحد در صفحه باشند. ثابت کنید

$$\sum_{۱ \leq i < j \leq k} |A_i - A_j|^۲ \leq k^۲.$$

(منظور از $|A_i - A_j|$ فاصله دو نقطه A_i و A_j در صفحه است.)

۲. $P(x)$ یک چندجمله‌ای تکین با ضرایب صحیح از درجه حداقل یک است. فرض کنید $P_۱(x), \ldots, P_n(x)$ نیز چندجمله‌ای‌هایی تکین با ضرایب صحیح باشند که برای هر $۱ \leq i \leq n$، $\deg(P_i) \geq \deg(P)$. به علاوه می‌دانیم برای هر عدد طبیعی x، می‌توان عدد طبیعی y و اندیس i ($۱ \leq i \leq n$) یافت که $P(x) = P_i(y)$. ثابت کنید اندیس $۱ \leq j \leq n$ و عدد صحیح k وجود دارد که $P(x) = P_j(x+k)$.

۳. a، b و c اعدادی حقیقی ناصفر و متمایز هستند که برای آن‌ها توابع $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ وجود دارد که تساوی

$$af(xy) + bf(\frac{x}{y}) = cf(x) + g(y)$$

برای هر مقدار حقیقی به اندازه کافی بزرگ y و هر مقدار حقیقی مثبت x برقرار باشد. ثابت کنید تابع $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ وجود دارد که برای هر مقدار به اندازه کافی بزرگ y و هر مقدار مثبت x،

$$f(xy) + f(\frac{x}{y}) = ۲f(x) + h(y).$$

موفق باشید.

۱. فرض کنید $k \geq ۳$ یک عدد طبیعی و $A_۱, A_۲, \ldots, A_k$ تعدادی نقطه روی دایره واحد در صفحه باشند. ثابت کنید

$$\sum_{۱\leq i<j\leq k} |A_i - A_j|^۲ \leq k^۲.$$

(منظور از $|A_i - A_j|$ فاصله دو نقطه A_i و A_j در صفحه است.)

راه‌حل. توجه کنید که $\sum_{۱\leq i<j\leq k} |A_i - A_j|^۲ = \frac{۱}{۲} \sum_{۱\leq i,j\leq k} |A_i - A_j|^۲$. چرا که اگر i و j برابر باشند، $|A_i - A_j|^۲$ برابر صفر است و سایر مقادیر دو بار ظاهر شده اند.

$$\begin{aligned}\sum_{۱\leq i,j\leq k} |A_i - A_j|^۲ &= \sum_{۱\leq i,j\leq k} (A_i - A_j)(\overline{A_i} - \overline{A_j}) \\ &= \sum_{۱\leq i,j\leq k} (۲ - A_i\overline{A_j} - A_j\overline{A_i}) = ۲k^۲ - ۲\sum_{۱\leq i,j\leq k} A_i\overline{A_j} \\ &= ۲k^۲ - (\sum_{i=۱}^{k} A_i)(\sum_{j=۱}^{k} \overline{A_j}) = ۲k^۲ - |\sum_{i=۱}^{k} A_i|^۲ \\ &\leq ۲k^۲\end{aligned}$$

□

۲. $P(x)$ یک چندجمله‌ای تکین با ضرایب صحیح از درجه حداقل یک است. فرض کنید $P_۱(x), \dots, P_n(x)$ نیز چندجمله‌ای‌هایی تکین با ضرایب صحیح باشند که برای هر $۱ \leq i \leq n$، $\deg(P_i) \geq \deg(P)$. به علاوه می‌دانیم برای هر عدد طبیعی x، می‌توان عدد طبیعی y و اندیس i $(۱ \leq i \leq n)$ یافت که $P(x) = P_i(y)$. ثابت کنید اندیس $۱ \leq j \leq n$ و عدد صحیح k وجود دارد که $P(x) = P_j(x+k)$.

راه‌حل. ابتدا با یک لم شروع می‌کنیم.

لم. فرض کنید $Q(x)$ یک چندجمله‌ای تکین از درجه m با ضرایب حقیقی باشد. در این صورت عدد طبیعی M وجود دارد که برای هر x با $|x| > M$، $\frac{۱}{۲}|x|^m < |Q(x)| < \frac{۳}{۲}|x|^m$.

راه‌حل لم. با توجه به تکین بودن $Q(x)$ می‌توان نوشت $Q(x) = x^m + S(x)$ که $S(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه کم‌تر از m است. در این صورت می‌توان عدد حقیقی مثبت M یافت که برای هر x با $|x| > M$، $|\frac{۱}{۲}x^m - S(x)| > ۰$ و لذا $\frac{۱}{۲}|x|^m > |S(x)|$. پس

$$|Q(x)| = |x^m + S(x)| \leq |x|^m + |S(x)| \leq |x|^m + \frac{۱}{۲}|x|^m = \frac{۳}{۲}|x|^m.$$

$$|Q(x)| = |x^m + S(x)| \geq |x|^m - |S(x)| \geq |x|^m - \frac{۱}{۲}|x|^m = \frac{۱}{۲}|x|^m.$$

□

حال به مسئله اصلی باز می‌گردیم. قصد داریم برای یک عدد طبیعی N بزرگ، تعداد اعدادی که در بین اعداد $۱, ۲, \dots, N$ به فرم $P(x)$ برای یک عدد طبیعی x هستند را تخمین بزنیم. فرض کنید چندجمله‌ای P در صورت مسئله از درجه d باشد. می‌توان $M_۰$ را به گونه‌ای انتخاب کرد که حکم بیان شده در لم بالا برقرار باشد و به علاوه برای هر $x > M_۰$، چندجمله‌ای P صعودی و مثبت باشد.

$$M_۰ < x < T \Rightarrow P(x) \leq \frac{۳}{۲}|x|^d < \frac{۳}{۲}T^d.$$

طبق این نکته اگر $M_۰ < x < (\frac{۲N}{۳})^{\frac{۱}{d}}$ باشد (برای N بزرگ که این مقدار از $M_۰$ بیش‌تر باشد)، $۰ < Q(x) < N$. پس تعداد اعدادی در بین $۱, ۲, \dots, N$ که در $P(\mathbb{N})$ هستند دست‌کم $(\frac{۲N}{۳})^{\frac{۱}{d}} - M_۰$ است.

بدون کم شدن از کلیت مسئله فرض کنید، چندجمله‌ای‌های $P_۱, P_۲, \dots, P_t$ در صورت سوال از درجه بیش‌تر از d باشند و $P_{t+۱}, \dots, P_n$ درجه d داشته باشند. با استدلال مشابه بالا برای $P_۱, \dots, P_t$ می‌توان $M_۱$ یافت که اگر $x > M_۱$ حکم لم برای هر یک از این چندجمله‌ای‌ها برقرار باشد و به علاوه همه روی این بازه مثبت و اکیداً صعودی باشند.

$$M_۱ < T < x \Rightarrow P_i(x) \geq \frac{۱}{۲}|x|^{\deg(P_i)} > \frac{۱}{۲}T^{\deg P_i}, \quad ۱ \leq i \leq t.$$

این نتیجه می‌دهد که اگر $x > (۲N)^{\frac{۱}{\deg P_i}} \geq (۲N)^{\frac{۱}{d+۱}}$ باشد، $N < P_i(x)$. پس تعداد اعداد طبیعی در $۱, ۲, \dots, N$ که در $P_۱(\mathbb{N}) \cup \dots \cup P_t(\mathbb{N})$ آمده است، حداکثر برابر $t(۲N)^{\frac{۱}{d+۱}}$ است. بنابراین حداقل

$$(\frac{۲N}{۳})^{\frac{۱}{d}} - M_۰ - t(۲N)^{\frac{۱}{d+۱}}$$

تا از اعداد بین $N ,\dots ,1$ باید در برد $P_{t+1}(\mathbb{N}) \cup \dots \cup P_n(\mathbb{N})$ باشند. چون تفاضل بالا با زیاد شدن N به بی‌نهایت میل می‌کند، پس نتیجه می‌گیریم که بی‌نهایت عدد به فرم $P(x)$ به فرم $P_i(y)$ برای یک P_i از درجه d هستند. چون تعداد چندجمله‌ای‌های از درجه d متناهی است، پس اندیس j یافت می‌شود که برای بی‌نهایت x، $P(x)$ به فرم $P_j(y)$ برای یک y طبیعی مناسب است.

بدون کاسته شدن از کلیت مسئله فرض کنید $P_j(x)$ را با $Q(x)$ نمایش دهیم. اکنون می‌دانیم دنباله‌ای اکیداً صعودی $x_1 < x_2 < \dots$ و دنباله‌ی $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ از اعداد طبیعی وجود دارند که برای هر i، $P(x_i) = Q(y_i)$. با توجه به این که $P(x)$ و $Q(x)$ هم‌درجه و تکین هستند، می‌توان عدد صحیح k یافت که $P(x+k-1) < Q(x) < P(x+k+1)$ (لم پایین). پس برای هر y_i که به اندازه کافی بزرگ باشد،

$$P(y_i+k-1) < Q(y_i) = P(x_i) < P(y_i+k+1).$$

(دقت کنید که چون x_i به بی‌نهایت میل می‌کند و P از جایی به بعد صعودی است، y_iها نیز از جایی به بعد در دامنه صعودی بودن تابع Q قرار می‌گیرند و لذا به بی‌نهایت میل می‌کنند.) پس $y_i+k-1 < x_i < y_i+k+1$ و لذا $x_i = y_i + k$. این یعنی تساوی $Q(x) = P(x+k)$ برای بی‌نهایت x برقرار است و حکم مدنظر ما اثبات می‌شود.

لم. فرض کنید $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای تکین هم‌درجه باشند. ثابت کنید عدد صحیح یک‌تای k وجود دارد که برای مقادیر بزرگ x، $Q(x+k-1) < P(x) < Q(x+k+1)$.

اثبات لم. فرض کنید $P(x) = x^d + ax^{d-1} + \cdots$ و $Q(x) = x^d + bx^{d-1} + \cdots$. حال برای عدد صحیح m

$$Q(x+m) = (x+m)^d + b(x+m)^{d-1} + \cdots = x^d + (m+b)x^{d-1} + \cdots .$$

پس اگر k به گونه‌ای انتخاب شود که $b+k-1 < a < b+k+1$ نابرابری‌های مد نظر برای مقادیر بزرگ x برقرار می‌شود. $\square$

$\square$

.۳

راه‌حل. یک بار در فرض سوال x را برابر xy و بار دیگر برابر $\frac{x}{y}$ قرار می‌دهیم و به همراه فرض اصلی می‌نویسیم.

$$af(xy^2)+bf(x)=cf(xy)+g(y)$$
$$af(x)+bf(\frac{x}{y^2})=cf(\frac{x}{y})+g(y)$$
$$af(xy)+bf(\frac{x}{y})=cf(x)+g(y)$$

سه عبارت بالا را به ترتیب در a، b ، c ضرب کرده و با هم جمع می‌کنیم

$$a^2f(xy^2)+b^2f(\frac{x}{y^2})+\underbrace{acf(xy)+bcf(\frac{x}{y})}+2abf(x)=\underbrace{acf(xy)+bcf(\frac{x}{y})}+c^2f(x)+(a+b+c)g(y).$$

معادلاً

$$a^2f(xy^2)+b^2f(\frac{x}{y^2})=(c^2-2ab)f(x)+(a+b+c)g(y).$$

از طرف دیگر با جای‌گذاری y^2 به جای y در فرض سوال

$$af(xy^2)+bf(\frac{x}{y^2})=cf(x)+g(y^2).$$

اگر این عبارت را در b ضرب کنیم و از بالایی کم کنیم

$$(a^2-ab)f(xy^2)=(c^2-2ab-ac)f(x)+\underbrace{(bg(y^2)-(a+b+c)g(y))}_{T(y)}$$

اگر در این رابطه به جای y، y^2 قرار دهیم

$$(a^2-ab)f(xy^4)=(c^2-2ab-ac)f(x)+T(y^2)$$

با کم کردن این دو از هم و با توجه به ناصفر بودن a^2-ab داریم

$$f(xy^4)-f(xy^2)=\frac{T(y^2)-T(y)}{a^2-ab}$$

که عبارت آخر را با $S(y)$ نمایش می‌دهیم. حال برای هر $X>0$ می‌توان x یافت که $xy^2=X$ پس

$$f(Xy^2)-f(X)=S(y).$$

به همین ترتیب $f(X)-f(\frac{X}{y^2}=S(y)$. کم کردن این دو عبارت و قرار دادن $\sqrt{y}$ به جای y حکم مد نظر سوال نتیجه می‌شود.

□

موفق باشید.


آکادمی تیزلاین
برگزار می کند:
دوره سالانه
تخفیف ویژه برای تیزلاینی ها
www.tizline.ir
۰۲۱۴۴۱۳۶۹۷۵
دکتر رضا رحمت اله زاده
کلاس آنلاین المپیاد
شیمی (سطح یک)
شنبه ها ۲۰ تا ۲۱:۱۵
شروع از ۲۲ آبان
۱۵ جلسه
۶۰۰ هزار تومان
دکتر افشین بهمرام
کلاس آنلاین المپیاد
ریاضی (سطح یک)
یکشنبه ها ۲۰ تا ۲۱:۱۵
شروع از ۲۳ آبان
۱۵ جلسه
۶۰۰ هزار تومان
دکتر میثم کوهگرد
کلاس آنلاین المپیاد
فیزیک (سطح یک)
پنجشنبه ها ۱۸:۱۵ تا ۱۹:۳۰
شروع از ۲۷ آبان
۱۵ جلسه
۶۰۰ هزار تومان
دکتر قربانی
کلاس آنلاین المپیاد
زیست شناسی (سطح یک)
سه شنبه ها ۱۸:۱۵ تا ۱۹:۳۰
شروع از ۲۵ آبان
۱۵ جلسه
۶۰۰ هزار تومان
دکتر میثم کوهگرد
کلاس آنلاین المپیاد
فیزیک (سطح دو)
پنجشنبه ها ۲۰ تا ۲۱:۱۵
شروع از ۲۷ آبان
۲۰ جلسه
۸۰۰ هزار تومان
دکتر قربانی
کلاس آنلاین المپیاد
زیست شناسی (سطح دو)
سه شنبه ها ۲۰ تا ۲۱:۱۵
شروع از ۲۵ آبان
۲۰ جلسه
۸۰۰ هزار تومان
#تیزلاینی_شو
ثبت نام در سایت رسمی
tizline.ir
www.tizline.ir
۰۹۳۳-۳۸۴ ۰۲۰۲
۰۲۱-۹۱۳۰۲۲۰۲

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور