آکادمی آنلاین تیز لاین

قوی‌ترین پلتفرم آموزشی تیزهوشان

- برگزار کننده کلاس های آنلاین و حضوری تیزهوشان و المپیاد از پایه چهارم تا دوازدهم
- آزمون های آنلاین و حضوری
- مشاوره تخصصی

با اسکن QR کد روبرو وارد صفحه اینستاگرام آکادمی تیزلاین شو و از محتواهای آموزشی رایگان لذت ببر

TIZLINE.IR

برای ورود به صفحه اصلی سایت آکادمی تیزلاین کلیک کنید

برای دانلود دفترچه آزمون های مختلف برای هر پایه کلیک کنید

برای مطالعه مقالات بروز آکادمی تیزلاین کلیک کنید

www.Tizline.ir ۰۲۱ ۴۴۱۳ ۶۹۷۵ ۰۹۳۳ ۳۸۴ ۰۲۰۲ ۵۰۰۰۲۶۹۱۳۲۴

آکادمی آموزشی تیزلاین

به نام او

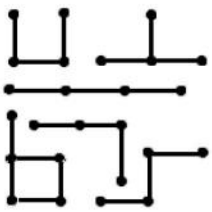
آزمون خلاقیت

دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۲

سه‌شنبه ۱۳۹۲/۶/۱۹

مدت امتحان ۱۲۰ دقیقه

۱. چند چوبه!



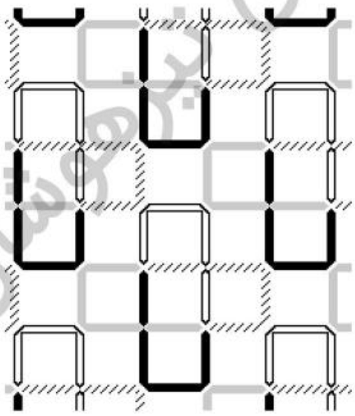
یک n **چوبه**، شکلی همبند است که با n چوب کبریت افقی یا عمودی به طول واحد ساخته می‌شود. شکل‌هایی را که با دوران و تقارن به یکدیگر تبدیل می‌شوند یکی میگیریم. مثلاً در شکل روبرو همه‌ی ۳چوبه‌ها و یک ۵چوبه دیده می‌شود.

یک n **مینو** شکلی است که با چسباندن n مربع واحد از روی یال‌ها به یکدیگر به دست آید به طوریکه بین هر دو مربع واحد مسیری از مربع‌های متصل در شکل یافت شود.

فرض کنید S_n تعداد n چوبه‌ها و M_n تعداد n مینوها باشد. مثلاً با توجه به شکل‌های بالا داریم $S_۳ = ۵$ و $M_۳ = ۲$.

الف) ثابت کنید به ازای هر n طبیعی داریم: $S_n \geq M_{n+۱}$

ب) ثابت کنید برای n های به اندازه کافی بزرگ داریم: $(۲.۴)^n \leq S_n \leq ۱۶^n$



یک **یال شبکه‌ای** پاره خطی به طول واحد در صفحه است که مختصات رئوس آن صحیح باشد. یک چندچوبه را **دانا** گوییم، هرگاه به وسیله‌ی آن بتوان مجموعه‌ی یال‌های شبکه‌ای را فرش کرد (استفاده از دوران و تقارن مجاز است). در غیر این صورت آن را **نادان** می‌نامیم. برای مثال شکل مقابل نشان می‌دهد که ۴چوبه‌ی دانا است. همچنین به سادگی دیده می‌شود که ۵چوبه‌ی نادان است.

ج) ثابت کنید حداقل $۲^{n-۶}$ تا n چوبه‌ی نادان وجود دارد.

د) ثابت کنید هر چندچوبه به شکل یک مسیر که هربار به سمت راست یا بالا می رود، دانا است.

ه) (نمره اضافه) ثابت کنید برای n های به اندازه کافی بزرگ داریم: $۳^n \leq S_n \leq ۱۲^n$

موفق باشید.

mathmovie6 Tizline.ir

www.Tizline.ir @tizline ۰۹۳۳ ۳۸۴ ۰۲۰۲ ۵۰۰۰۲۶۹۱۳۲۴ ۰۲۱۹۱۳۰۲۲۰۲

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور

آکادمی تیزلاین، تولید کننده محتوای آموزشی تیزهوشان www.tizline.ir

آکادمی آموزشی تیزلاین

به نام او

آزمون خلاقیت

دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۲

سه‌شنبه ۱۳۹۲/۶/۱۹

مدت امتحان ۱۵۰ دقیقه

۲. فاصله‌ی بین دوایر!

***فاصله‌ی** بین دو دایره ω, ω' را برابر با طول مماس مشترک خارجی آن‌ها تعریف می کنیم و با نماد $d(\omega, \omega')$ نمایش می دهیم. اگر دو دایره مماس مشترک خارجی نداشته باشند، فاصله‌ی بین آن‌ها تعریف نمی‌شود. توجه کنید که یک نقطه هم یک دایره‌ی به شعاع صفر است و فاصله‌ی دو دایره می‌تواند صفر باشد.*

الف) مرکزثقل. تعدادی دایره ثابت $\omega_1, \dots, \omega_n$ در صفحه داریم. نشان دهید دایره یکتای $\overline{\omega}$ در صفحه وجود دارد که برای دایره متغیر ω، مربع فاصله‌ی بین ω و $\overline{\omega}$ منهای میانگین مربعات فواصل بین ω و ω_iها عددی ثابت باشد (به ازای ωهایی که همه این فواصل تعریف شده هستند). یعنی:

$$\forall \omega: \quad d(\omega, \overline{\omega})^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(\omega, \omega_i)^2 = \text{مقدار ثابت}$$

$\overline{\omega}$ را **مرکز ثقل** $\omega_1, \dots, \omega_n$ می‌نامیم، زیرا خاصیت فوق مشابه خاصیت مرکز ثقل نقاط است.

ب) عمود منصف. فرض کنید دایره‌ی ω از دوایر ω_1 و ω_2 هم‌فاصله باشد. ω_3 را دایره‌ی دلخواهی بگیرید که مرکز آن روی خط‌المرکزین ω_1 و ω_2 است و بر مماس مشترک خارجی ω_1 و ω_2 مماس است. ثابت کنید « فاصله‌ی بین ω و مرکز ثقل ω_1 و ω_2 » از « فاصله‌ی بین ω و ω_3 » بیشتر نیست. (در صورتی که این فواصل همگی تعریف شده باشند)

ج) مرکز دایره‌ی محیطی. C را مجموعه همه‌ی دایره‌هایی را در نظر بگیرید که هر کدام از آن‌ها از سه دایره‌ی ثابت ω_1، ω_2 و ω_3 هم فاصله است. ثابت کنید نقطه‌ی ثابتی در صفحه وجود دارد که مرکز تجانس مستقیم دو به دوی اعضای C است.

د) چهاروجهی منتظم. آیا چهار دایره در صفحه وجود دارد که فاصله‌ی هر دو تا از آنها برابر واحد باشد؟

mathmovie6 Tizline.ir
www.Tizline.ir @tizline ۰۹۳۳ ۳۸۴ ۰۲۰۲ ۵۰۰۰۲۶۹۱۳۲۴ ۰۲۱۹۱۳۰۲۲۰۲
مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور
با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور

آکادمی آموزشی تیزلاین

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور

به نام او

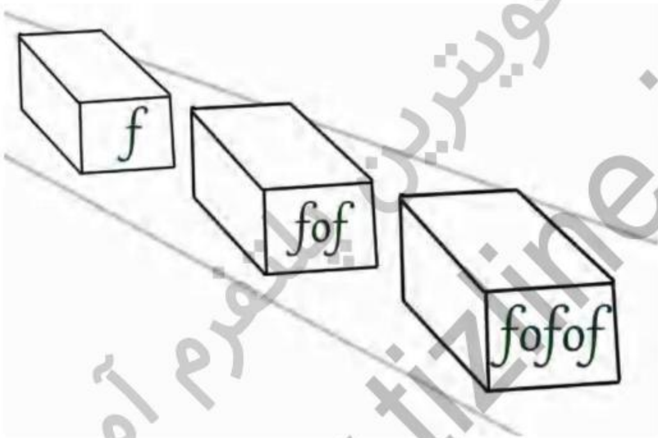
آزمون خلاقیت

دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۲

سه‌شنبه ۱۳۹۲/۶/۱۹

مدت امتحان ۷۵ دقیقه

۳. تولید توابع!



می گوییم تابع حقیقی f تابع g را **تولید** می‌کند (و با نماد $f \to g$ نمایش می دهیم)، اگر g از ترکیب چندباره f با خودش بدست آید؛ یعنی عدد طبیعی k موجود باشد که: $\underbrace{fofo \ldots of}_{k \text{ بار}} = g$

به دنبال یافتن خواصی برای این رابطه هستیم. مثلاً به راحتی می توان ثابت کرد که اگر $f \to g$ و $g \to h$ آنگاه $f \to h$. (خاصیت ترایایی)

الف) دو تابع حقیقی $f \neq g$ مثال بزنید که $f \to g, g \to f$.

ب) ثابت کنید به ازای هر تابع حقیقی f، تعداد متناهی تابع g وجود دارد که $f \to g, g \to f$.

ج) آیا تابع g وجود دارد که هیچ تابعی جز خودش، آن را تولید نکند؟

د) آیا تابع f وجود دارد که $x^۳$ و $x^۵$ را تولید کند؟

ه) ثابت کنید اگر تابعی دو چندجمله‌ای درجه یک P, Q را تولید کند آنگاه یک چندجمله‌ای درجه یک نیز P, Q را تولید می‌کند.

mathmovie6 Tizline.ir
www.Tizline.ir @tizline ۰۹۳۳ ۳۸۴ ۰۲۰۲ ۵۰۰۰۲۶۹۱۳۲۴ ۰۲۱۹۱۳۰۲۲۰۲

آکادمی آموزشی تیزلاین

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور

به نام او

آزمون خلاقیت

دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۲

چهارشنبه ۱۳۹۲/۶/۲۰

مدت امتحان ۱۵۰ دقیقه

۴. چندضلعی تپل!

*چندضلعی A را که خودش را قطع نمی‌کند و دارای محیط p است، **چندضلعی تپل** می‌گوییم، در صورتی که برای هر دو نقطه‌ی x, y روی محیط A که فاصله‌ی آنها در صفحه حداکثر ۱ باشد، فاصله‌ی آنها روی محیط A (یعنی جزء کوچکتر محیط A که بین x, y قرار دارد) حداکثر $\frac{p}{۴}$ باشد.*

می‌خواهیم ثابت کنیم در هر چندضلعی تپل می‌توان دایره ای به شعاع $\frac{۱}{۴}$ جای داد.

متفکران سیاره‌ی زمین و محققان **سیاره‌ی آب‌دوغ‌خیار** دو رویکرد متفاوت برای حل سوال در پیش گرفتند. در هر دو رویکرد منظور از **وتر** پاره خطی است که دو سر آن روی محیط چندضلعی باشد. **قطر** وتری است که دو سر آن رئوس چندضلعی باشد. **وتر داخلی**، وتری است که هر نقطه از آن داخل یا روی محیط چندضلعی است. **فاصله روی محیط** بین دو نقطه روی چندضلعی را طول جزء کوچکتر محیط بین آن دو نقطه در نظر می‌گیریم.

رویکرد زمینی: وتر بیشینه!

این واقعیت را می دانیم که برای هر چندضلعی، وتر داخلی xy با طول حداکثر واحد یافت می‌شود به طوری که برای هر وتر داخلی $x'y'$ با طول حداکثر واحد، فاصله روی محیط x, y بزرگتر یا مساوی فاصله روی محیط x', y' باشد. این وتر را **وتر بیشینه** می نامیم.

آکادمی آموزشی تیزلاین

آزمون خلاقیت

دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۲

در چندضلعی تپل A_O دو حالت برای وتر بیشینه وجود دارد:

الف) **حالت اول:** طول وتر بیشینه برابر واحد باشد. ثابت کنید نیم دایره‌ای به قطر وتر بیشینه به طور کامل درون A_O قرار دارد و در نتیجه در این حالت می توان دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{4}$ در داخل چندضلعی جای داد.

ب) **حالت دوم:** طول وتر بیشینه کمتر از واحد باشد. ثابت کنید در این حالت نیز دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{4}$ یافت می‌شود که به طور کامل درون A_O قرار می گیرد.

زمینی‌ها بارها گمان کردند این سؤال را حل کرده‌اند ولی هر بار متوجه ایرادی ظریف در اثبات خود شدند تا نهایتاً موفق به حل سؤال شدند.

رویکرد آب‌دوغ‌خیاری: مثلث بندی!

دو گزاره زیر را در نظر بگیرید.

گزاره اول: « هر چندضلعی دلخواه را که طول اضلاعش حداکثر واحد است و نمی‌توان دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{4}$ در آن جای داد می‌توان به وسیله‌ی قطرهایی داخلی با طول حداکثر واحد مثلث‌بندی کرد. »

گزاره دوم: « هر چندضلعی دلخواه را که نمی‌توان دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{4}$ در آن جای داد می‌توان به وسیله‌ی وترهایی داخلی مثلث‌بندی کرد به نحوی که طول اضلاع همه‌ی مثلث‌ها حداکثر واحد باشند.»

آب‌دوغ‌خیاری‌ها با برهان خلف به این نتیجه رسیدند که اگر گزاره دوم درست باشد آنگاه در هر چندضلعی تپل می‌توان دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{4}$ جای داد.

ج) شما نیز ثابت کنید اگر گزاره دوم درست باشد آنگاه در هر چندضلعی تپل می‌توان دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{4}$ جای داد.

آنها به سادگی دریافتند که اگر گزاره اول درست باشد آنگاه گزاره دوم هم درست است. پس برای حل گزاره اول یک دوغ جایزه گذاشتند! مدتی بعد، جوانی به نام **ج.ن.** که خود را زمینی می‌دانست، موفق شد با نقض گزاره اول، نقشه‌های آب‌دوغ‌خیاری‌ها را نقش بر آب کرده و دوغ را از آن خود کند.

د) یک ۱۳۹۲ضلعی مثال بزنید که گزاره اول را نقض کند.

با این حال آب‌دوغ‌خیاری‌ها ناامید نیستند و می‌خواهند گزاره دوم را مستقیماً اثبات کنند.

ه) (نمره اضافه) درباره درست بودن گزاره دوم هرچه می توانید بنویسید.

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور
با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور
آکادمی آموزشی تیزلاین قوی‌ترین پلتفرم آموزشی تیزهوشان www.tizline.ir
mathmovie6 Tizline.ir
www.Tizline.ir @tizline ۰۹۳۳ ۳۸۴ ۰۲۰۲ ۵۰۰۰۲۶۹۱۳۲۴ ۰۲۱۹۱۳۰۲۲۰۲

آکادمی آموزشی تیزلاین
مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور
با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور

به نام او

آزمون خلاقیت

دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۲

چهارشنبه ۱۳۹۲/۶/۲۰

مدت امتحان ۷۵ دقیقه

۵. در جستجوی اعداد از دست رفته!

یک **زیرجمع** n عدد حقیقی $a_1, a_2, \dots, a_n$، *به معنای جمع تعدادی از این n عدد است؛ یعنی $\epsilon_1 a_1 + \epsilon_2 a_2 + \cdots + \epsilon_n a_n$ که ϵ_iها صفر یا یک هستند و حداقل یکی از ϵ_iها ناصفر است. اکنون با داشتن این زیرجمع‌ها در جستجوی اعداد هستیم!*

سال‌ها پیش لیستی ارزشمند شامل n عدد حقیقی (نه لزوماً متمایز) به همراه تمام $۲^n - ۱$ زیرجمع آن‌ها را در دست داشتیم. تعدادی موجود عجیب از سیاره‌ی آب‌دوغ‌خیار، (پس از شکست در حل مسئله‌ی چندضلعی تپل!)، n عدد اولیه‌ی ما را دزدیده‌اند و تنها چیزی که از آن‌ها در دست داریم همان $۲^n - ۱$ زیرجمع است!

الف) ثابت کنید اگر همه‌ی زیرجمع‌ها مثبت باشند، می‌توانیم اعداد دزدیده شده را به صورت یکتا بدست آوریم.

ب) فرض کنید تعدادی از زیرجمع‌ها مثبت و تعدادی منفی باشند، اما هیچ یک از آن‌ها صفر نباشد. نشان دهید در این حالت نیز می‌توانیم اعداد دزدیده شده را به صورت یکتا بدست آوریم.

ج) نشان دهید برای $n = ۱۳۹۲$، مثالی وجود دارد که نتوانیم به طور یکتا n عدد دزدیده شده را با داشتن تمام $۲^n - ۱$ زیرجمع آنها تعیین کنیم.

mathmovie6 Tizline.ir
www.Tizline.ir @tizline ۰۹۳۳ ۳۸۴ ۰۲۰۲ ۵۰۰۰۲۶۹۱۳۲۴ ۰۲۱۹۱۳۰۲۲۰۲

آکادمی آموزشی تیزلاین

به نام او

آزمون خلاقیت

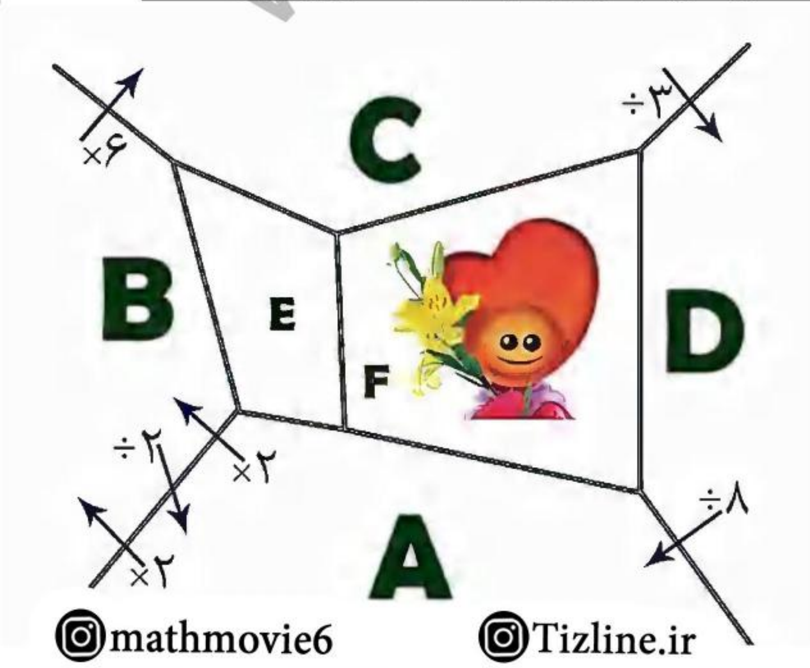
دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۲

چهارشنبه ۱۳۹۲/۶/۲۰

مدت امتحان ۹۰ دقیقه

۶. جهانگردان سیاره‌ی آب‌دوغ‌خیار!

در گیر و دارهای میان‌سیاره‌ای، منجمان خبره‌ی زمینی، **سیاره‌ی آب‌دوغ‌خیار** را در کهکشان راه دوغی کشف کردند. این سیاره به شکل یک ۱۳۹۲وجهی محدب است ولی منجمان هیچ اطلاعی از شیوه‌ی قرار گیری وجه‌های آن ندارند. دانشمندان با تجزیه‌ی طیفی پرتوهایی که از سیاره‌ی آب‌دوغ‌خیار ساطع می‌شوند، حقایقی راجع به زندگی موجودات روی این سیاره کشف کرده‌اند! از جمله این که هر وجه سیاره یک کشور است، هر کشور واحد پول جداگانه‌ای دارد و سرتاسر مرز هر دو کشور مجاور، **نرخی ثابت** برای تبدیل ارز این دو کشور موجود است. کسانی که از مرز دو کشور عبور می‌کنند باید تمام پول خود را به واحد پول کشور مقصد تبدیل کنند و هیچ راه دیگری برای تبدیل ارز وجود ندارد. منجمان در کمال ناباوری مشاهده کردند که ممکن است یک مسافر طی چندین سفر و بازگشت به نقطه‌ی اولیه، پولش تغییر کرده‌باشد. متفکران دلیل این پدیده را تفاوت نرخ تبادل ارز روی مرزها با نسبت واقعی ارزش پول‌ها می‌دانند. مثلاً در شکل زیر اگر کسی از کشور A به ترتیب به کشورهای B، A، B، C و D برود و سپس به کشور خودش باز گردد، دارایی نهایی‌اش نصف دارایی اولیه‌اش خواهد بود. اما اگر کسی فقط به یک کشور همسایه برود و برگردد دارایی‌اش تغییر نمی‌کند (زیرا حاصلضرب نرخ تبدیل ارز دو طرف یک مرز برابر واحد است).



مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور
با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور
www.Tizline.ir @tizline ۰۹۳۳ ۳۸۴ ۰۲۰۲ ۵۰۰۰۲۶۹۱۳۲۴ ۰۲۱۹۱۳۰۲۲۰۲

آزمون خلاقیت

دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۲

در یک پروژه‌ی تحقیقاتی، تعداد زیادی جهانگرد در سیاره‌ی آب‌دوغ‌خیار کشف شدند که با سرمایه اولیه‌ی یکسان از یک کشور شروع به سفر کردند و هر کدام پس از طی مسیری به شکل خط‌شکسته‌ی بسته روی چندوجهی که خودش را قطع نکرده است به نقطه‌ی شروعشان بازگشته‌اند! حداکثر چند تا از این جهانگردها وجود دارند که سرمایه‌ی نهایی آنها دو به دو متمایز باشد؟

توجه ۱: هیچ جهانگردی در طول سفر پولی خرج نمی‌کند!

توجه ۲: تنها ثابت سوال تعداد کشورها (۱۳۹۲) است. باقی مقادیر مانند چیدمان کشورها و نرخ تبدیل ارز روی مرزها متغیرهای سوال به حساب می‌آیند. پس پاسخ شما باید یک عدد باشد.

توجه ۳: با توجه به ناشناخته بودن ساختار سیاره‌ی آب‌دوغ‌خیار، باید در بین همه‌ی ۱۳۹۲وجهی‌های ممکن این حداکثر را بیابید.

آکادمی تیزلاین، قویترین پلتفرم آموزشی تیزهوشان
www.tizline.ir

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

آکادمی آموزشی تیزلاین

به نام او

آزمون خلاقیت

دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۲

پنج‌شنبه ۱۳۹۲/۶/۲۱

مدت امتحان ۱۲۰ دقیقه

۷. خواص جالب معادلات جالب!

معادله‌ی $P(x) = Q(y)$ را **جالب** می‌گوییم اگر P و Q چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب صحیح و درجه‌ی حداقل یک باشند و این معادله بی‌نهایت جواب در اعداد طبیعی داشته باشد. می‌گوییم معادله‌ی $F(x) = G(y)$ از معادله‌ی $P(x) = Q(y)$ **نتیجه می‌شود،** اگر چندجمله‌ای R با ضرایب گویا موجود باشد که $F(x) = R(P(x))$ و $G(y) = R(Q(y))$.

الف) فرض کنید S زیرمجموعه‌ای نامتناهی از $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ باشد. می‌گوییم S در معادله‌ی جالب $P(x) = Q(y)$ **صدق می‌کند،** اگر هر عضو آن در این معادله صدق کند. نشان دهید معادله‌ی جالب $P_o(x) = Q_o(y)$ وجود دارد که هر معادله‌ی جالبی که S در آن صدق کند (در صورت وجود)، از معادله‌ی $P_o(x) = Q_o(y)$ نتیجه می‌شود.

ب) درجه‌ی معادله‌ی جالب $P(x) = Q(y)$ را برابر بزرگترین درجه بین درجات P و Q تعریف می‌کنیم. یک معادله‌ی جالب را **اولیه** می‌گوییم اگر از هیچ معادله‌ی جالبی با درجه‌ی کمتر نتیجه نشود. نشان دهید اگر $P(x) = Q(y)$ یک معادله‌ی جالب اولیه باشد و P و Q تکین باشند، آن‌گاه درجه‌ی P و درجه‌ی Q نسبت به هم اول هستند.

آکادمی آموزشی تیزلاین، تیزترین، بالاترین
www.tizline.ir
مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور
با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور
mathmovie6 Tizline.ir
www.Tizline.ir @tizline ۰۹۳۳ ۳۸۴ ۰۲۰۲ ۵۰۰۰۲۶۹۱۳۲۴ ۰۲۱۹۱۳۰۲۲۰۲

آکادمی آموزشی تیزلاین

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور

به نام او

آزمون خلاقیت

دوره‌ی تابستانی المپیاد ریاضی، ۱۳۹۲

پنج‌شنبه ۱۳۹۲/۶/۲۱

مدت امتحان ۷۵ دقیقه

۸. پنج‌ضلعی گویا!

فرض کنید $A_۱A_۲A_۳A_۴A_۵$ یک پنج‌ضلعی محدب در صفحه باشد که مختصات رئوس آن گویا است. برای هر $۵ \leq i \leq ۱$، محل تقاطع امتداد اضلاع $A_{i+۱}A_{i+۲}$ و $A_{i+۳}A_{i+۴}$ را با B_i نامگذاری می‌کنیم. (رئوس پنج‌ضلعی به صورت دوری شماره‌گذاری شده‌اند؛ یعنی برای هر i، $A_i = A_{i+۵}$.) نشان دهید حداکثر سه تا از خطوط A_iB_i $(۵ \leq i \leq ۱)$ همرس‌اند.

آکادمی تیزلاین، قویترین پلتفرم آموزشی تیزهوشان www.tizline.ir

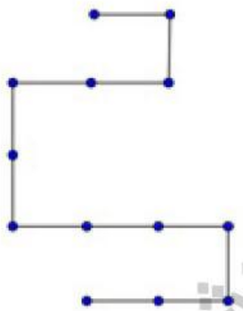
بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

راه‌حل آزمون خلاقیت ۱۳۹۲

سؤال شماره ۱. چند چوبه!

الف. یک $(n+1)$مینو در نظر بگیرید و مراکز مربع‌های مجاور در آن را به هم وصل کنید. به وضوح گراف حاصل هم‌بند است پس حداقل n یال دارد. حال یک زیردرخت آن یک n چوبه می‌شود. $(n+1)$مینوی مربوط به هر n چوبه، در صورت وجود یک‌تا است. پس S_n بزرگ‌تر یا مساوی تعداد n چوبه‌های بدون دور است و این مقدار هم حداقل M_{n+1} است.

ب.



راه اول. [1]: می‌توانیم مسیرهای nتایی به سمت بالا و راست و چپ را بشماریم و کران پایین به‌تری برای S_n به دست آوریم. این گونه مسیرها متناظر است با تعداد رشته‌های nتایی از نمادهای $\uparrow, \leftarrow, \rightarrow$ به طوری‌که هیچ $\leftarrow, \rightarrow$ مجاور نداشته باشند. اگر تعداد این رشته‌ها را A_n نام‌گذاری کنیم آن‌گاه $8S_n \ge A_n$، زیرا هر چندچوبه را حداکثر به ۸ طریق می‌توان روی صفحه قرار داد.

A_n در رابطه‌ی بازگشتی زیر صدق می‌کند:

$$A_1 = 3,\ A_2 = 7,\ A_n = 2A_{n-1} + A_{n-2}$$

به عنوان تمرین می‌توانید این رابطه‌ی بازگشتی را با حالت‌گیری روی اولین نماد هر رشته‌ی nتایی به دست آورید.
معادله‌ی مشخصه‌ی این رابطه را تشکیل می‌دهیم و ریشه‌های آن را می‌یابیم: $t^2 = 2t + 1$ و در نتیجه $t_1, t_2 = 1 \pm \sqrt{2}$.
با حل این رابطه‌ی بازگشتی درمی‌یابیم که: $A_n = \alpha(1+\sqrt{2})^n + \beta(1-\sqrt{2})^n$. با مقدارگذاری اولیه‌ی $n = 1, 2$ مقدار α, β به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \alpha(1+\sqrt{2}) + \beta(1-\sqrt{2}) = 3 \\ \alpha(3+2\sqrt{2}) + \beta(3-2\sqrt{2}) = 7 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1+\sqrt{2}}{2},\ \beta = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

پس: $A_n = \frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}\right]$.
از طرفی: $1+\sqrt{2} > 2.41$ و $|1-\sqrt{2}| < 1$. پس از جایی به بعد $S_n \ge \frac{A_n}{8} > (2.41)^n$.

راه دوم. همه‌ی ۲چوبه‌ها را در نظر بگیرید که با انتقال به یک‌دیگر تبدیل نمی‌شوند. تعداد این ۲چوبه‌ها ۶تا است. در هرکدام رأس سمت راست‌ترین، و در بین آن‌ها بالاترین را با $\circ$، و رأس سمت چپ‌ترین و در بین آن‌ها پایین‌ترین را با $\times$

[1] برای مطالعه‌ی بیش‌تر می‌توانید به مقاله‌ی «سرگذشت چندچوبه» در شماره‌ی تابستان ۹۲ فصل‌نامه‌ی پرگار مراجعه کنید.

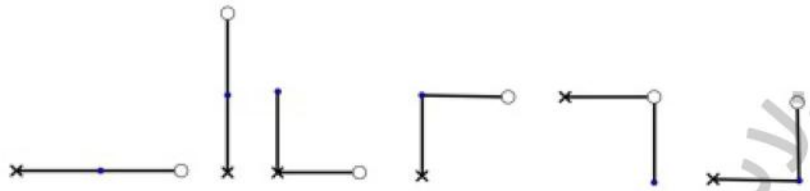
مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور
با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور
mathmovie6
Tizline.ir
www.Tizline.ir @tizline ۰۹۳۳ ۳۸۴ ۰۲۰۲ ۵۰۰۰۲۶۹۱۳۲۴ ۰۲۱۹۱۳۰۲۲۰۲

آکادمی آموزشی تیزلاین

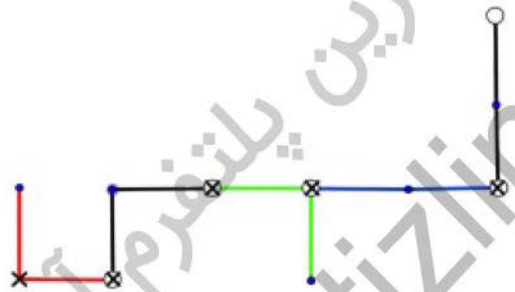
با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

مشخص می‌کنیم.



حال برای nهای به اندازه‌ی کافی بزرگ، $[\frac{n}{۲}]$ تا از این ۲چوبه‌ها را انتخاب می‌کنیم و به ترتیب رأس $\times$ هریک را به رأس $\circ$ قبلی وصل می‌کنیم. (اگر n فرد بود، یک چوب کبریت افقی هم به $\circ$ آخرین ۲چوبه وصل می‌کنیم.)



هر یک از این $[\frac{n}{۲}]$ تا ۲چوبه، ۶ حالت دارند، به این ترتیب $۶^{[\frac{n}{۲}]}$ تا n چوبه به دست می‌آید که با انتقال به یک‌دیگر تبدیل نمی‌شوند. هر n چوبه حداکثر ۸ بار در بین این $۶^{[\frac{n}{۲}]}$ شکل آمده است. پس: $۸S_n \ge ۶^{[\frac{n}{۲}]} \ge \sqrt{۶}^{n-۱}$. از طرفی $\sqrt{۶} \ge ۲/۴$ پس از جایی به بعد: $S_n \ge (۲/۴)^n$.

برای کران بالا هم با استفاده از لم زیر مسئله را اثبات می‌کنیم.

لم. در هر گراف هم‌بند که در آن درجه‌ی هر رأس زوج است، دوری وجود دارد که از هر یال دقیقاً یک بار عبور کند.

اثبات. با استقرا روی تعداد یالها و شروع از یک رأس و خارج شدن از هر رأسی که به آن وارد می‌شویم حکم نتیجه می‌شود. □

پس اگر می‌توانستیم درجه‌ی هر رأس از گراف چندچوبه را زوج کنیم، آن‌گاه طبق قضیه‌ی بالا یک دور در آن گراف یافت می‌شد که از هر یال دقیقاً یک بار عبور کند. مثلاً می‌توانیم هر یال را دو بار رسم کنیم. در این صورت یک گراف با $۲n$ یال داریم که در آن درجه‌ی هر رأس زوج است. پس طبق قضیه‌ی بالا دوری در این گراف وجود دارد که از همه‌ی یال‌ها عبور کند. پس تعداد دورهای به طول $۲n$ روی شبکه بیش‌تر یا مساوی تعداد nچوبه‌ها است. کافی است کران بالایی برای تعداد دورهای به طول $۲n$ روی شبکه بیابیم.

تعداد دورهای به طول $۲n$ روی شبکه هم حداکثر برابر است با تعداد رشته‌های $۲n$تایی با استفاده از نمادهای $\leftarrow, \downarrow, \rightarrow, \uparrow$ به طوری‌که در هر رشته تعداد $\downarrow, \uparrow$ها باهم، و تعداد $\rightarrow, \leftarrow$ها باهم برابر باشد. این تعداد هم برابر است با انتخاب تعدادی

mathmovie6 Tizline.ir

www.Tizline.ir @tizline ۰۹۳۳ ۳۸۴ ۰۲۰۲ ۵۰۰۰۲۶۹۱۳۲۴ ۰۲۱۹۱۳۰۲۲۰۲

راه‌حل آزمون خلاقیت ۱۳۹۲

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور
مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

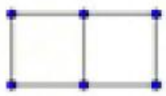
مکان برای $\uparrow$ و همان تعداد مکان برای $\downarrow$، و سپس انتخاب نصف مکان‌های باقی‌مانده برای $\leftarrow$ و قرار دادن $\rightarrow$ در بقیه‌ی جاها. یعنی:

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{k}\binom{2n-k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$$

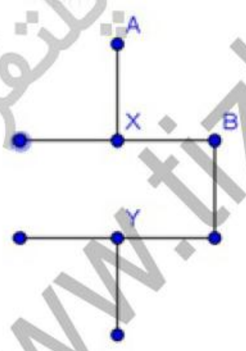
با ساده کردن عبارت بالا به دست می‌آید:

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{k}\binom{2n-k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!}=\binom{2n}{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k}=\binom{2n}{n}^2$$

و $\binom{2n}{n}^2 \le (2^{2n})^2 = 16^n$. پس تعداد دورهای به طول $2n$ روی شبکه، و به تبع آن تعداد nچوبه‌ها حداکثر 16^n است.



ج. برای $n=7$ چندچوبه‌ی مقابل نادان است. برای $n>7$ اگر از نقطه‌ی A یا B در شکل زیر شروع کنیم و $n-7$ یال به سمت بالا یا راست برویم، چندچوبه‌ی حاصل نادان است زیرا در چندچوبه شامل پاره‌خط عمودی XY، این پاره‌خط همسایه‌ای نخواهد داشت. پس حداقل $2^{n-7}+2^{n-7}=2^{n-6}$ تا n چوبه‌ی نادان یافتیم.



د. یک مسیر به سمت بالا و راست در نظر بگیرید و با بی‌نهایت نسخه از آن، یک مسیر نامتناهی به سمت بالا و راست تشکیل دهید.

لم ۱. اگر مسیر نامتناهی بالا و راست را یک واحد به سمت بالا و چپ انتقال دهیم، مسیر حاصل با مسیر اولیه در هیچ نقطه‌ای اشتراک ندارد.

اثبات. فرض کنید یک مسیر و انتقال‌یافته‌اش در نقطه‌ای مثل x اشتراک داشته باشند. پس x و انتقال‌یافته x به سمت پایین و راست، هر دو روی مسیر اولیه هستند که چنین چیزی با بالا و راست بودن مسیر در تناقض است.

□

حال مسیر نامتناهی را L بنامید و بی نهایت نسخه انتقال‌یافته به سمت بالا و چپ از این مسیر را در کنارش قرار می‌دهیم. طبق لم ۱ هیچ دو مسیری اشتراک ندارند. حال قرینه L نسبت به نیم‌ساز ربع اول و سوم (خط $y=x$) را L' می‌نامیم.

لم ۲. L, L' در هیچ یالی اشتراک ندارند.

اثبات. فرض کنید یال e در L, L' باشد. پس e و متقارن e نسبت به خط $y=x$، هر دو روی L هستند که چنین چیزی با بالا و راست بودن L در تناقض است.

آکادمی آموزشی تیزلاین

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

□

در نتیجه می‌توان L, L' و انتقال‌یافته‌های آن‌ها (به سمت بالا و چپ) را روی صفحه قرار داد و هیچ دو مسیری اشتراک یالی ندارند. حال ادعا می‌کنیم هر یال پوشیده می‌شود. یال e را در نظر بگیرید و آن را آن قدر به سمت بالا و چپ (یا پایین و راست) انتقال دهید تا به مسیر L برخورد کند. این برخورد یا در یک یال اتفاق افتاده است و یا در یک رأس، در حالت اول e روی انتقال‌یافته‌ی L است و در حالت دوم e روی انتقال‌یافته‌ی L' است.

هـ برای کران پایین اگر در راه حل دوم قسمت (ب)، به جای ۲چوبه‌ها از ۴چوبه‌ها استفاده کنیم به کران زیر می‌رسیم: $S_n \geq (\sqrt[4]{88})^n \sim (3/06)^n$.

برای کران بالا حداکثر 16×8^nشکل هم‌بند رسم می‌کنیم و ادعا می‌کنیم هر n چوبه حداقل یک بار رسم شده است. اشکال را به این صورت رسم می‌کنیم: در مرحله‌ی اول یک رأس رسم می‌کنیم، آن را علامت می‌زنیم و 2^4 حالت برای یال‌های متصل به آن را رسم می‌کنیم. پس تا این‌جا ۱۶ شکل رسم شده است.

در هر مرحله، از هر شکل رسم‌شده در مرحله‌ی قبلی، حداکثر ۸ شکل جدیدتر می‌سازیم و آن‌ها را رسم می‌کنیم. به این صورت که هر یک از اشکال رسم‌شده را در نظر می‌گیریم و در بین رئوس علامت‌نخورده‌اش، رأس سمت راست‌ترین و در بین آن‌ها بالاترین را علامت می‌زنیم، حداقل یکی از یال‌های این رأس رسم شده است زیرا شکل هم‌بند است. در بین یال‌های دیگر منتهی به این رأس به حداکثر $8 = 2^3$ حالت برخی از آن‌ها را انتخاب می‌کنیم و شکل جدیدی با اضافه کردن این یال‌ها رسم می‌کنیم.

پس در هر مرحله اشکال هم‌بند هستند و تعداد آن‌ها حداکثر ۸ برابر مرحله‌ی قبلی است. از طرفی هر n چوبه حداکثر $n+1$ رأس دارد، در نتیجه حتماً پس از حداکثر n مرحله رسم می‌شود. پس:

$$S_n \leq 16 + 16 \times 8 + 16 \times 8^2 + \dots + 16 \times 8^{n-1} \leq 16 \times 8^n$$

و از جایی به بعد: $16 \times 8^n \leq (8/01)^n < 12^n$.

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور
با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور
آکادمی تیزلاین، تولید کننده محتوای آموزشی تیزهوشان www.tizline.ir

سؤال شماره ۲. فاصله‌ی بین دوایر!

دایره‌ی به مرکز O و شعاع R را با $C(O,R)$ نشان می‌دهیم. اگر $\omega_1 = C(O_1, R_1)$ و $\omega_2 = C(O_2, R_2)$ می‌دانیم:

$$d(\omega_1, \omega_2)^2 = O_1O_2{}^2 - (R_1 - R_2)^2$$

و $d(\omega_1, \omega_2)$ تعریف‌شده است اگر و تنها اگر عبارت سمت راست نامنفی باشد. این موضوع معادل است با این که ω_1 و ω_2 متداخل نباشند و یا مماس داخلی باشند.

الف. قرار دهید $\omega = C(O,R)$ و $\omega_i = C(O_i, R_i)$. داریم:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(\omega,\omega_i)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} OO_i^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(R-R_i)^2$$

اگر $\bar{R}$ را میانگین اعداد $R_1, \dots, R_n$ بگیریم، آن‌گاه داریم:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(R-R_i)^2 = R^2 - 2R\bar{R} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i^2 = (R-\bar{R})^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{R}-R_i)^2$$

به طور مشابه، اگر $\bar{O}$ را مرکز ثقل نقاط $O_1, \dots, O_n$ بنامیم، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} OO_i{}^2 = O\bar{O}^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{O}O_i^2$$

(برای اثبات این رابطه باید مختصات این نقاط را در نظر بگیریم و از رابطه‌ی مشابه برای R_iها استفاده کنیم) بنابراین

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(\omega,\omega_i)^2 = O\bar{O}^2 + (R-\bar{R})^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{O}O_i^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{R}-R_i)^2$$

پس دایره‌ی $C(\bar{O},\bar{R})$ در خاصیت مسأله صدق می‌کند.

حال فرض کنید $\bar{\omega}_1 = C(P_1, r_1)$ و $\bar{\omega}_2 = C(P_2, r_2)$ دو دایره باشند که در فرض مسئله صدق می‌کنند. اگر $\omega = C(O,R)$ را دایره‌ای بگیریم که با همه‌ی $\omega_1, \dots, \omega_n$ و $\bar{\omega}_1$ و $\bar{\omega}_2$ متخارج است، آن‌گاه نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} & d(\omega,\bar{\omega}_1)^2 - d(\omega,\bar{\omega}_2)^2 = \text{Constant} \\ \Rightarrow\ & OP_1^2 - OP_2^2 + (R-r_1)^2 - (R-r_2)^2 = \text{Constant} \\ \Rightarrow\ & OP_1^2 - OP_2^2 - 2R(r_1 - r_2) = \text{Constant} \end{aligned}$$

(که منظور از Constant یک مقدار ثابت است.)

با ثابت نگه‌داشتن O نتیجه می‌گیریم $r_1 = r_2$. بنابراین $OP_1^2 - OP_2^2$ نیز مقداری ثابت است. بنابراین $P_1 = P_2$ و در نتیجه $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2$ پس $\bar{\omega} = C(\bar{O},\bar{R})$ تنها جواب مسئله است.

ب. برای $i = 1, 2$ قرار دهید $\omega_i = C(O_i, R_i)$ و $\omega = C(O,R)$ همچنین فرض کنید $O_i = (x_i, 0)$ و $O = (x,y)$. می‌توانیم بنویسیم:

$$x_2 = x_1 + \alpha(x_2 - x_1) = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2$$

که α یک عدد حقیقی است. چون فاصله‌ی O_1 و O_2 از مماس مشترک خارجی ω_1 و ω_2 به‌ترتیب برابر با R_1 و R_2 است، نتیجه می‌گیریم که فاصله‌ی O_2 از این خط برابر است با $|(1-\alpha)R_1 + \alpha R_2|$ (اگر داخل قدر مطلق منفی باشد، به این

معنی است که O_2 و O_1 در دو طرف خط مذکور هستند. بنابراین:

$$R_2 = |(1-\alpha)R_1 + \alpha R_2|$$

مرکز ثقل ω_1 و ω_2 نیز برابر است با $\bar{\omega} = C\left(\left(\frac{x_1+x_2}{2}, 0\right), \frac{R_1+R_2}{2}\right)$ که یعنی در رابطه‌ی مربوط به ω_2، $\alpha = \frac{1}{2}$ باشد. می‌دانیم:

$$\begin{aligned}
&d(\omega,\omega_1) = d(\omega,\omega_2)\\
&\Rightarrow OO_1^2 - (R-R_1)^2 = OO_2^2 - (R-R_2)^2\\
&\Rightarrow OO_1^2 - OO_2^2 = R_1^2 - R_2^2 - 2R(R_1 - R_2)\\
&\Rightarrow (x-x_1)^2 - (x-x_2)^2 = R_1^2 - R_2^2 - 2R(R_1-R_2)\\
&\Rightarrow 2x(x_1-x_2) - 2R(R_1-R_2) = x_1^2 - x_2^2 - R_1^2 + R_2^2
\end{aligned}$$

حال داریم:

$$\begin{aligned}
d(\omega,\omega_2)^2 &= (x-x_2)^2 + y^2 - (R-R_2)^2\\
&= (x - ((1-\alpha)x_1 + \alpha x_2))^2 + y^2 - (R - ((1-\alpha)R_1 + \alpha R_2))^2\\
&= ((x-x_1) + \alpha(x_1 - x_2))^2 + y^2 - ((R-R_1) + \alpha(R_1 - R_2))^2
\end{aligned}$$

دایره‌های ω، ω_1 و ω_2 را ثابت بگیرید و α را متغیر. بنابراین $d(\omega,\omega_2)^2$ یک چندجمله‌ای درجه ۲ برحسب α است. ضریب α^2 در این چندجمله‌ای برابر است با $(x_1-x_2)^2 - (R_1-R_2)^2$ که این مقدار نامنفی است زیرا $d(\omega_1,\omega_2)$ تعریف‌شده است. هم‌چنین ضریب α برابر است با:

$$2(x_1-x_2)(x-x_1) - 2(R_1-R_2)(R-R_1)$$

طبق رابطه‌ای که بین x و R به‌دست آوردیم، این مقدار برابر است با:

$$x_1^2 - R_1^2 - x_2^2 + R_2^2 - 2x_1(x_1-x_2) + 2R_1(R_1-R_2) = -(x_1-x_2)^2 + (R_1-R_2)^2$$

بنابراین ضریب α^2 و α قرینه‌ی یک‌دیگر هستند. در صورتی که این ضرایب برابر با صفر باشند (یعنی ω_1, ω_2 مماس داخل باشند)، مقدار $d(\omega,\omega_2)$ مستقل از α است. در غیر این صورت، کم‌ترین مقدار $d(\omega,\omega_2)$ به‌ازای $\alpha = \frac{1}{2}$ اتفاق می‌افتد و حکم ثابت می‌شود.

ج. ابتدا توجه کنید که مرکز اصلی ω_1 و ω_2 و ω_3 به عنوان دایره‌ای با شعاع صفر از این سه دایره به یک فاصله است (در صورتی که خارج آن‌ها باشد). پس حدس می‌زنیم:

لم. اگر هر یک از دو دایره‌ی C_1 و C_2 از دو دایره‌ی ω_1 و ω_2 به یک فاصله باشد، آن‌گاه مرکز تجانس مستقیم C_1 و C_2 روی محور اصلی ω_1 و ω_2 است. در صورتی که مرکز تجانس مستقیم C_1 و C_2 تعریف نشده باشد (یعنی شعاع آن‌ها مساوی باشد)، خط‌المرکزین C_1 و C_2 موازی با محور اصلی ω_1 و ω_2 است.

فرض کنید لم درست باشد. در صورتی که مراکز ω_1، ω_2 و ω_3 هم‌خط نباشند، آن‌گاه محورهای اصلی دوبه‌دوی آن‌ها هم‌رس‌اند و موازی نیستند. حال طبق لم فوق مرکز اصلی ω_1، ω_2 و ω_3 در شرایط مسئله صدق می‌کند. در صورتی که

آکادمی تیزلاین، قوی‌ترین پلتفرم آموزشی تیزهوشان www.tizline.ir
mathmovie6 Tizline.ir
www.Tizline.ir @tizline ۰۹۳۳ ۳۸۴ ۰۲۰۲ ۵۰۰۰۲۶۹۱۳۲۴ ۰۲۱۹۱۳۰۲۲۰۲
مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور
با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

مراکز آن‌ها هم‌خط باشند، محورهای اصلی موازی هستند. اگر محورهای اصلی متمایز باشند، آن‌گاه حداکثر یک دایره از همه‌ی ω_iها به یک فاصله است و حکم به انتفاء مقدم درست است.

راه اول. قرار دهید $\omega_i = C(O_i, R_i)$ و $C_i = C(P_i, r_i)$. فرض کنید $O_i = (x_i, 0)$ و $P_i = (a_i, b_i)$. اگر نقطه‌ی $(x, 0)$ روی محور اصلی ω_1 و ω_2 باشد، آن‌گاه:

$$(x - x_1)^2 - R_1^2 = (x - x_2)^2 - R_2^2 \Rightarrow x = \frac{x_1^2 - x_2^2 - R_1^2 + R_2^2}{2(x_1 - x_2)}$$

این رابطه، معادله‌ی محور اصلی ω_1 و ω_2 است. مقدار فوق را c می‌نامیم. در اثبات قسمت (ب) به‌دست آوردیم:

$$2a_i(x_1 - x_2) - 2r_i(R_1 - R_2) = x_1^2 - R_1{}^2 - x_2^2 + R_2^2 \Rightarrow a_i = r_i\frac{R_1 - R_2}{x_1 - x_2} + c$$

مرکز تجانس C_1 و C_2 روی P_1P_2 است. پس می‌توانیم بنویسیم $S = (1 - \alpha)P_1 + \alpha P_2$. با توجه به نسبت فاصله‌های آن از P_1 و P_2، می‌توان دید: $S = \frac{r_2}{r_2 - r_1}P_1 - \frac{r_1}{r_2 - r_1}P_2$ (در صورتی که $r_1 \neq r_2$). بنابراین مؤلفه‌ی اول S برابر است با:

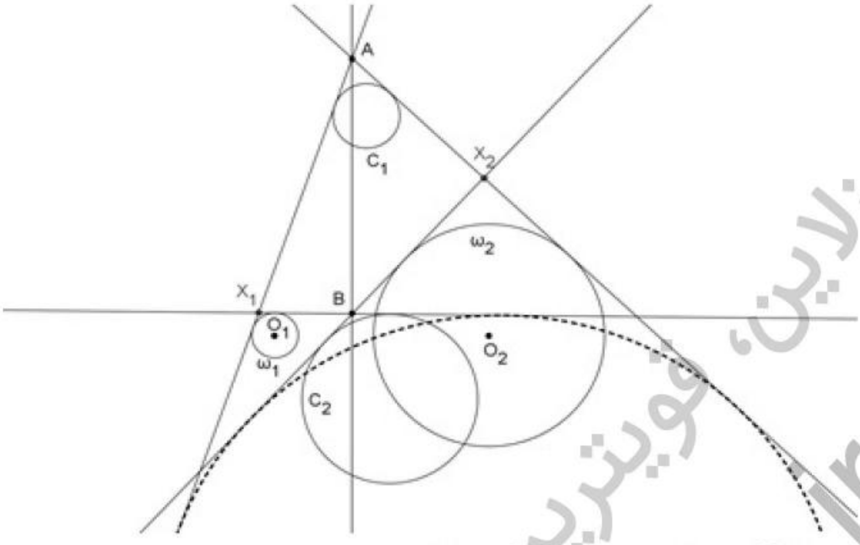
$$\frac{r_2 a_1 - r_1 a_2}{r_2 - r_1} = \frac{1}{r_2 - r_1}\left[r_2\left(r_1\frac{R_1 - R_2}{x_1 - x_2} + c\right) - r_1\left(r_2\frac{R_1 - R_2}{x_1 - x_2} + c\right)\right] = c$$

بنابراین S روی محور اصلی ω_1 و ω_2 است.

در صورتی که $r_1 = r_2$، طبق روابط فوق خواهیم داشت $a_1 = a_2$. پس خط‌المرکزین C_1 و C_2 موازی محور اصلی ω_1 و ω_2 است.

راه دوم. برای هر i و j، یکی از مماس مشترک‌های C_i و ω_j را رسم کنید و تقاطع‌های آن‌ها را مطابق با شکل A، B، X_1 و X_2 بنامید. مسئله را تنها در حالتی حل می‌کنیم که شکل مسئله شبیه به شکل زیر باشد. در حالت‌های دیگر استدلال مشابه است (البته باید مماس مشترک‌ها به طور مناسبی انتخاب شوند. نوشتن راه حلی که در همه‌ی حالت‌ها معتبر باشد نیاز به تعاریف و نمادگذاری‌های زیادی دارد که از حوصله‌ی خواننده خارج است). با توجه به این که C_1 از ω_1 و ω_2 به یک فاصله است، نتیجه می‌گیریم که A نیز از این دو دایره به یک فاصله است. پس A روی محور اصلی ω_1 و ω_2 است. به طور مشابه، B نیز روی محور اصلی آن‌ها است. هم‌چنین با توجه به برابری دو مماس رسم شده از X_1 بر ω_1 و دو مماس رسم شده از X_2 بر ω_2 به دست می‌آوریم: $BX_1 + AX_1 = BX_2 + AX_2$ بنابراین امتداد اضلاع چهارضلعی AX_1BX_2 مطابق شکل بر یک دایره مثل C مماس‌اند. حال A مرکز تجانس مستقیم C و C_1 است و B مرکز تجانس مستقیم C و C_2. پس طبق قضیه‌ی سه مرکز تجانس، مرکز تجانس مستقیم C_1 و C_2 روی AB است و حکم ثابت می‌شود.

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور
با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور
آکادمی تیزلاین، قوی‌ترین پلتفرم آموزشی تیزهوشان
www.tizline.ir



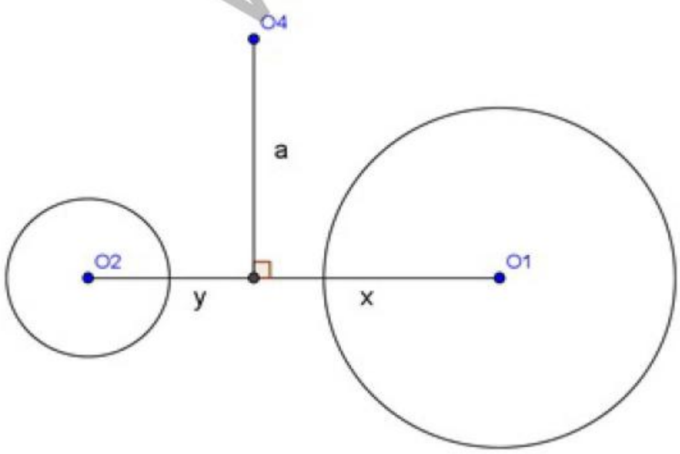
د. خیر.

قرار دهید $\omega_i = C(O_i, R_i)$ و فاصله‌ی O_i و O_j را d_{ij} بنامید. طبق فرض باید داشته باشیم:

$$d_{ij}^2 - (R_i - R_j)^2 = 1$$

چون تفاضل R_iها در این روابط ظاهر می‌شود، پس با افزایش یا کاهش همه‌ی شعاع‌ها به مقدار برابر، روابط فوق تغییری نمی‌کنند. پس می‌توانیم فرض کنیم $R_4 = 0$. هم‌چنین فرض کنید $R_1 \geq R_2 \geq R_3$. O_4 روی محور اصلی ω_1 و ω_2 است. مطابق شکل زیر داریم:

$$\begin{aligned} a^2 + x^2 - R_1^2 &= 1 \\ a^2 + y^2 - R_2^2 &= 1 \\ (x+y)^2 - (R_1 - R_2)^2 &= 1 \end{aligned}$$



با کم کردن دو رابطه‌ی اول از رابطه‌ی سوم به‌دست می‌آوریم:

$$2xy + 2R_1R_2 + 2 - 2a^2 = 1 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{1}{2} + xy + R_1R_2}$$

از طرفی با تفاضل دو رابطه‌ی اول داریم:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = R_1^2 - R_2^2 \\ x + y = d_{12} \end{cases} \Rightarrow x - y = \frac{R_1^2 - R_2^2}{d_{12}}$$

$$\Rightarrow \{x, y\} = \frac{d_{12}}{2} \pm \frac{R_1^2 - R_2^2}{2d_{12}}$$

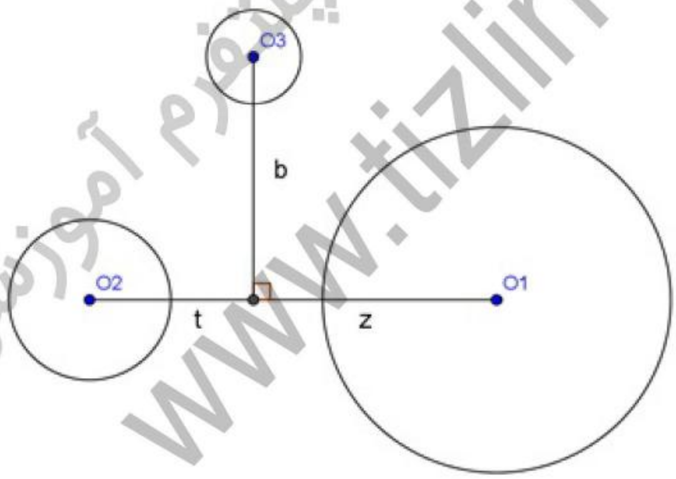
$$\Rightarrow xy = \frac{d_{12}^2}{4} - (\frac{R_1^2 - R_2^2}{d_{12}})^2$$

بنابراین:

$$a = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{d_{12}^2}{4} - \frac{(R_1^2 - R_2^2)^2}{4d_{12}^2} + R_1 R_2}$$

حال وضعیت $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ را بررسی می‌کنیم. به طور مشابه، با کوچک کردن هر سه شعاع به اندازه‌ی R_3 به‌دست می‌آوریم:

$$b = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{d_{12}^2}{4} - \frac{((R_1 - R_3)^2 - (R_2 - R_3)^2)^2}{4d_{12}^2} + (R_1 - R_3)(R_2 - R_3)}$$



دو حالت در نظر می‌گیریم:

- **حالت اول**. فرض کنید O_3 و O_4 دو طرف خط O_1O_2 باشند. در این صورت داریم:

$$O_3O_4^2 - R_4^2 = 1 \Rightarrow 1 + R_4^2 = O_3O_4^2 \geq (a+b)^2 \geq a^2 + b^2$$

اما داریم:

$$a^2 > \frac{1}{2} + R_1 R_2$$

$$b^2 > \frac{1}{2} + (R_1 - R_3)(R_2 - R_3)$$

بنابراین:

$$R_4^2 > R_1 R_2 + (R_1 - R_3)(R_2 - R_3) \Rightarrow (R_1 + R_2)R_3 > 2R_1 R_2$$

اما این با $R_1 \geq R_2 \geq R_3$ متناقض است.

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور
با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور
آکادمی تیزلاین، قویترین پلتفرم آموزشی تیزهوشان www.tizline.ir

- **حالت دوم.** O_3 و O_4 یک طرف خط O_1O_2 هستند. در این صورت:

$$\begin{aligned}
1+R_3^2 &= (a-b)^2+(x-z)^2 = (a^2+x^2)+(b^2+z^2)-2ab-2xz\\
&= 1+R_1^2+1+(R_1-R_3)^2-2ab-2xz\\
&\Rightarrow 0 = 1+2R_1^2-2R_1R_3-2ab-2xz\\
&\Rightarrow 4ab+4xz = 2+4R_1(R_1-R_3)
\end{aligned}$$

از طرفی با قرار دادن $d_{12}^2 = 1+(R_1-R_2)^2$ به‌دست می‌آوریم:

$$a=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{d_{12}^2}{4}-\frac{(R_1^2-R_2^2)^2}{4d_{12}^2}+R_1R_2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{(R_1+R_2)^2}{4}-\frac{(R_1-R_2)^2(R_1+R_2)^2}{4(1+(R_1-R_2)^2)}}$$

و به طور مشابه:

$$b=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{(R_1+R_2-2R_3)^2}{4}-\frac{(R_1-R_2)^2(R_1+R_2-2R_3)^2}{4(1+(R_1-R_2)^2)}}$$

پس اگر قرار دهیم:

$$\begin{aligned}
t &:= R_1-R_2\\
s &:= R_1+R_2-2R_3\\
r &:= R_1+R_2
\end{aligned}$$

آن‌گاه:

$$\begin{aligned}
a &= \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{r^2}{4}-\frac{r^2t^2}{4(1+t^2)}}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{r^2}{4(1+t^2)}}\\
b &= \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{s^2}{4(1+t^2)}}
\end{aligned}$$

هم‌چنین:

$$xz=\left(\frac{d_{12}}{2}+\frac{R_1^2-R_2^2}{2d_{12}}\right)\left(\frac{d_{12}}{2}+\frac{(R_1-R_3)^2-(R_2-R_3)^2}{2d_{12}}\right)=\frac{1+t^2}{4}+\frac{rt}{4}+\frac{st}{4}+\frac{rst^2}{4(1+t^2)}$$

حال داریم:

$$\begin{aligned}
&4ab+4xz=2+4R_1(R_1-R_3)\\
&\Rightarrow \sqrt{\left(3+\frac{r^2}{1+t^2}\right)\left(3+\frac{s^2}{1+t^2}\right)}+1+t^2+rt+st+\frac{rst^2}{1+t^2}=2+(r+t)(s+t)
\end{aligned}$$

با ضرب در $1+t^2$ و ساده کردن به‌دست می‌آوریم:

$$\sqrt{(3+3t^2+r^2)(3+3t^2+s^2)}=1+t^2+rs$$

اما این با نامساوی کوشی-شوارتز در تناقض است.

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور

آکادمی تیزلاین www.tizline.ir قوی‌ترین پلتفرم آموزشی تیزهوشان

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور

سؤال شماره ۳. تولید توابع!

به اختصار $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k}$ را با f^k نمایش می‌دهیم.

الف. قرار دهید:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x = 1 \\ 3 & x = 2 \\ 1 & x = 3 \\ x & x \notin \{1, 2, 3\} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 3 & x = 1 \\ 1 & x = 2 \\ 2 & x = 3 \\ x & x \notin \{1, 2, 3\} \end{cases}$$

به سادگی دیده می‌شود $f^2(x) = g(x),\ g^2(x) = f(x)$.

ب. فرض کنید حداقل یک تابع مثل g موجود است که $f \to g,\ g \to f$. پس اعداد طبیعی m و n موجودند که $f^m(x) = g(x),\ g^n(x) = f(x)$. در نتیجه $f^{mn}(x) = f(x)$. پس f حداکثر $mn - 1$ تابع مختلف را تولید می‌کند که این تعداد متناهی است.

ج. چنین تابعی وجود دارد. فرض کنید:

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & x \in \mathbb{Z} \\ x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

با برهان خلف ثابت می‌کنیم هیچ تابعی g را تولید نمی‌کند. فرض کنید تابع حقیقی f و عدد طبیعی $k > 1$ وجود دارد به طوری که $f^k(x) = g(x)$. برای هر $z \in \mathbb{Z}$ اگر $f(z) \notin \mathbb{Z}$ آن‌گاه $f(f(z)) = f(z)$ پس $z+1 = g(z) = f^k(z) = f(z)$ که با صحیح نبودن $f(z)$ در تناقض است. پس f هر عدد صحیح، عددی صحیح است. حال برای هر $z \in \mathbb{Z}$ داریم:

$$f(z) + 1 = g(f(z)) = f^{k+1}(z) = f(g(z)) = f(z + 1).$$

بنابراین تابع f روی اعداد صحیح تابع انتقال است، یعنی t وجود دارد که برای هر عدد صحیح z، $f(z) = z + t$ ولی در این صورت $z + 1 = g(z) = f^k(z) = z + kt$. که در تناقض با $k > 1$ است. پس f وجود ندارد که تابع g را تولید کند.

د. فرض کنید m, n موجودند که $f^m(x) = x^3,\ f^n(x) = x^5$. در این صورت $x^{3^n} = f^{mn}(x) = x^{5^m}$ بنابراین $3^n = 5^m$ که تناقض است.

ه. با استفاده از لم زیر حکم را ثابت می‌کنیم:

لم. اگر برای تابع حقیقی f اعداد طبیعی $a > b$ موجود باشند که $f^a(x), f^b(x)$ چندجمله‌ای‌های خطی باشند آن‌گاه $f^{a-b}(x)$ هم خطی است.

اثبات. فرض کنید $f^a(x) = a_1 x + a_0,\ f^b(x) = b_1 x + b_0$. در نتیجه $a_1 x + a_0 = f^{a-b}(b_1 x + b_0)$ قرار می‌دهیم $y = b_1 x + b_0$. پس $f^{a-b}(y) = \frac{a_1}{b_1} y + \left(a_0 - \frac{a_1 b_0}{b_1}\right)$ و چون y همه‌ی مقادیر را می‌تواند به خود بگیرد پس $f^{a-b}(y)$ هم تابعی خطی است. □

حال فرض کنید $f^m(x) = P(x),\ f^n(x) = Q(x)$ و $(m, n) = d$. آن‌گاه طبق لم بالا و با توجه به الگوریتم تقسیم $f^d(x)$ هم تابعی خطی است که به وضوح $P(x), Q(x)$ را تولید می‌کند.

آکادمی تیزلاین؛ قویترین پلتفرم آموزشی تیزهوشان www.tizline.ir

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور

سؤال شماره ۴. چندضلعی تپل!

الف. فرض کنید xy وتر بیشینه باشد. کمان کوچک‌تر بین x و y را C_1 و کمان بزرگ‌تر را C_2 بنامید. بنابر فرض، طول C_1 کوچک‌تر از $\frac{p}{4}$ است. فاصله‌ی دو نقطه روی محیط را با $d(a,b)$ نشان می‌دهیم. می‌خواهیم نشان دهیم نیم‌دایره‌ی به قطر xy که در طرف C_2 است، درون چندضلعی قرار دارد.

لم ۱. C_2 با پاره‌خط xy تنها در x و y اشتراک دارد.

اثبات. فرض کنید z نقطه‌ای از C_2 روی پاره‌خط xy و بین x و y باشد. به وضوح xz و yz وترهایی داخلی هستند. کمان کوتاه‌تر بین x و z نمی‌تواند از y بگذرد زیرا در آن صورت $d(x,z) > d(x,y)$ و این با بیشینه بودن xy تناقض دارد. مشابهاً کمان کوتاه‌تر بین y و z نیز نمی‌تواند از x بگذرد. پس کمان‌های xy، xz و yz محیط چندضلعی را افراز می‌کنند در حالی‌که بنابر فرضِ تپل بودن، طول هر کدام حداکثر $\frac{p}{4}$ است. این تناقض نشان می‌دهد که C_2 با پاره‌خط xy تنها در x و y اشتراک دارد. $\square$

لم ۲. اشتراک ضلع متصل به x با C_2، خارج از نیم‌دایره قرار دارد. مشابهاً برای y.

اثبات. اثبات. فرض کنید این طور نباشد. z را نقطه‌ای درون نیم‌دایره و روی C_2 و بسیار نزدیک به x و روی همان ضلعی که x قرار دارد بگیرید به طوری که yz چندضلعی را تنها در دو سرش قطع کند (با توجه به لم ۱ این کار امکان‌پذیر است). اکنون چون کمان کوچک‌تر بین x و y طولش از $\frac{p}{4}$ بیش‌تر نیست و چون z بسیار نزدیک به x انتخاب شد پس کمان yxz کمان کوچک‌تر بین y و z است و این با بیشینه بودن xy تناقض دارد. $\square$

لم ۳. C_2 با نیم‌دایره تقاطعی ندارد (به جز در x و y).

اثبات. z را نقطه‌ای روی C_2 در نظر بگیرید که درون نیم‌دایره قرار دارد و در بین نقاط با این خاصیت کم‌ترین فاصله را با پاره‌خط xy دارد (بنابر لم ۱ و ۲، این نقطه فاصله‌ی مثبتی از xy دارد). ادعا می‌کنیم xz و yz وترهای داخلی هستند. چون در غیر این صورت نقطه‌ای از چندضلعی مانند z' درون مثلث xyz قرار می‌گیرد که این با نحوه‌ی انتخاب z تناقض دارد.

$\square$

پس xz و yz وترهای داخلی هستند. ادامه‌ی اثبات مشابه لم ۱ است. کمان کوتاه‌تر بین x و z نمی‌تواند از y بگذرد زیرا در آن صورت $d(x,z) > d(x,y)$ و این با بیشینه بودن xy تناقض دارد. مشابهاً کمان کوتاه‌تر بین y و z نیز نمی‌تواند از x بگذرد. پس کمان‌های xy، xz و yz محیط چندضلعی را افراز می‌کنند در حالی‌که بنابر فرضِ تپل بودن، طول هر کدام حداکثر $\frac{p}{4}$ است.

اکنون با توجه به لم ۳، C_2 نیم‌دایره را قطع نمی‌کند. پس C_1 نیز آن را قطع نمی‌کند چون در غیر این صورت چندضلعی خودش را قطع می‌کند. پس نیم‌دایره کاملاً درون چندضلعی قرار دارد.

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور

ب. فرض کنید xy وتر بیشینه باشد. مشابه قسمت قبل کمان کوچک‌تر بین x و y را C_1 و کمان بزرگ‌تر را C_2 بنامید. بنابر فرض، طولِ C_1 کوچک‌تر از $\frac{p}{4}$ است.
به مرکز x و y نیم‌دایره‌هایی به شعاع ۱ و در طرفی از xy که C_2 قرار دارد رسم می‌کنیم. اشتراک این دو نیم‌دایره را ناحیه‌ی S می‌نامیم. می‌خواهیم نشان دهیم ناحیه‌ی S درون چندضلعی قرار دارد.

لم ۱. C_2 با پاره‌خط xy تنها در x و y اشتراک دارد.

اثبات. مشابه قسمت (الف).

□

لم ۲. اشتراک ضلع متصل به x با C_2، خارج از ناحیه‌ی S قرار دارد. مشابهاً برای y.

اثبات. فرض کنید این طور نباشد. z را نقطه‌ای درون S و روی C_2 و بسیار نزدیک به x و روی همان ضلعی که x قرار دارد بگیرید به طوری که yz چندضلعی را تنها در دو سرش قطع کند (با توجه به لم ۱ این کار امکان‌پذیر است). اکنون چون کمان کوچک‌تر بین x و y طولش از $\frac{p}{4}$ بیش‌تر نیست و چون z بسیار نزدیک به x انتخاب شد پس کمان yxz کمان کوچک‌تر بین y و z است و این با بیشینه بودن xy تناقض دارد.

□

لم ۳. C_2 با ناحیه‌ی S تقاطعی ندارد (به جز در x و y).

اثبات. z را نقطه‌ای روی C_2 در نظر بگیرید که درون ناحیه‌ی S قرار دارد و در بین نقاط با این خاصیت کم‌ترین فاصله را با پاره‌خط xy دارد (بنابر لم ۱ و ۲، این نقطه فاصله‌ی مثبتی از xy دارد). ادعا می‌کنیم xz و yz وترهای داخلی هستند. چون در غیر این صورت نقطه‌ای از چندضلعی مانند z' درون مثلث xyz قرار می‌گیرد که این با نحوه‌ی انتخاب z تناقض دارد.

□

پس xz و yz وترهای داخلی هستند و چون z درون S قرار دارد پس طول آن‌ها کم‌تر مساوی ۱ است پس بنابر فرضِ تپل بودن، فاصله‌ی دو سر آن‌ها روی محیط کم‌تر مساوی $\frac{p}{4}$ است. ادامه‌ی اثبات هم مشابه لم ۱ است. کمان کوتاه‌تر بین x و z نمی‌تواند از y بگذرد زیرا در آن صورت $d(x,z) > d(x,y)$ و این با بیشینه بودن xy تناقض دارد. مشابهاً کمان کوتاه‌تر بین y و z نیز نمی‌تواند از x بگذرد. پس کمان‌های xy، xz و yz محیط چندضلعی را افراز می‌کنند در حالی‌که طول آن‌ها کم‌تر مساوی $\frac{p}{4}$ است. اکنون با توجه به لم ۳، C_2 ناحیه‌ی S را قطع نمی‌کند. پس C_1 نیز آن را قطع نمی‌کند چون در غیر این صورت چندضلعی خودش را قطع می‌کند. پس ناحیه‌ی S کاملاً درون چندضلعی قرار دارد. اکنون به راحتی می‌توان دید که یک دایره به شعاع $\frac{1}{4}$ درون ناحیه‌ی S جای می‌گیرد.

ج. فرض کنید چندضلعی تپلی داریم که نمی‌توان دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{4}$ در آن جای داد. بنابر گزاره دوم می‌توان آن را به وسیله‌ی وترهای داخلی مثلث‌بندی کرد به نحوی که طول اضلاع همه‌ی مثلث‌ها حداکثر واحد باشد.
اکنون در بین وترهای داخلی یکی را که بیش‌ترین فاصله‌ی روی محیط بین دو سرش را دارد در نظر بگیرید مثلاً xy. جزء

آکادمی تیزلاین، قدیمی‌ترین پلتفرم آموزشی تیزهوشان www.tizline.ir

بزرگ‌تر محیط چندضلعی بین x و y را C می‌نامیم. دو حالت ممکن است:

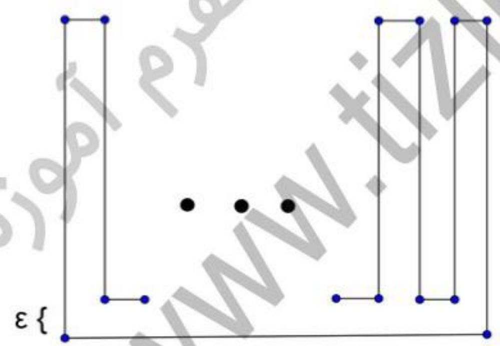
- **حالت اول.** C شامل رأسی دیگر از چندضلعی باشد.

در این حالت حتماً رأسی مانند z روی C وجود دارد که xyz یکی از مثلث‌های مثلث‌بندی است. اکنون کمان کوتاه‌تر بین x و z نمی‌تواند از y بگذرد زیرا در آن صورت $d(x,z) > d(x,y)$ و این با نحوه‌ی انتخاب xy تناقض دارد. مشابهاً کمان کوتاه‌تر بین y و z نیز نمی‌تواند از x بگذرد. پس کمان‌های xy، xz و yz محیط چندضلعی را افراز می‌کنند در حالی‌که بنابر فرض تپل بودن، طول هریک از آن‌ها کم‌تر مساوی $\frac{p}{4}$ است.

- **حالت دوم.** C شامل هیچ رأس دیگری از چندضلعی نباشد.

در این حالت xy باید ضلع چندضلعی باشد و در عین حال، این ضلع جزء بزرگ‌تر محیط بین x و y باشد که این با نابرابری مثلث در تناقض است.

د. اگر ϵ به اندازه‌ی کافی کوچک باشد شکل زیر یک مثال نقض برای گزاره‌ی اول است.



با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور
مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور
آکادمی تیزلاین، قویترین پلتفرم آموزشی تیزهوشان
www.tizline.ir

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور
با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور

سؤال شماره ۵. در جست‌وجوی اعداد از دست رفته!

الف. در بین زیرجمع‌ها کوچک‌ترین عدد را در نظر می‌گیریم. چون زیرجمع‌ها مثبتند پس اعداد اولیه نیز مثبت و در نتیجه کوچک‌ترین زیرجمع همان کوچک‌ترین عدد میان اعداد اولیه است. اعداد اولیه را $a_1 \leq \cdots \leq a_n$ بگیرید.
پس تا این‌جا ما a_1 را به دست آوردیم . حال فرض کنید $a_1, \ldots, a_i$ به صورت یک‌تا مشخص شده بودند. از زیرجمع‌ها آن‌هایی را که با این i عدد ساخته می‌شوند، حذف می‌کنیم. در میان باقی‌مانده‌ها کوچک‌ترین عدد باید a_{i+1} باشد.

ب. راه اول (اثبات ساختاری، جبری)
فرض کنید $a_1 \leq \cdots \leq a_k < 0 \leq a_{k+1} \leq \cdots \leq a_n$. $(1+x^{a_1})\cdots(1+x^{a_n}) = x^{s_1} + \cdots + x^{s_{2^n}}$ با تقسیم عبارت بر x^{s_1} داریم:

$$(1+x^{-a_1})\cdots(1+x^{-a_k})(1+x^{a_{k+1}})\cdots(1+x^{a_n}) = x^{s_1-s_1} + \cdots + x^{s_{2^n}-s_1}$$

که با توجه به حالت مثبت (قسمت (الف)) مقادیر $|a_i|$ها به دست می‌آیند. اکنون باید ثابت کنیم که اگر بخواهیم x^{s_1} را در دو طرف ضرب کنیم به یک طریق یک‌تا می‌شود بین پرانتزها پخش شود. فرض کنید که به دو طریق این کار انجام پذیرد. توجه کنید در این پخش شدن قدرمطلق‌ها نباید تفاوت کنند. پس این معادل این است که ۲ زیرجمع از $|a_i|$ها برابر $-s_1$ خواهد بود. یعنی:

$$|a_{i_1}| + \cdots + |a_{i_l}| = |a_{i_{l+1}}| + \cdots + |a_{i_k}|$$

(اندیس‌های مشترک را حذف کردیم) اما در این صورت در یک حالت $|a_{i_1}|, \ldots, |a_{i_l}|$ از اعداد اولیه به صورت منفی ظاهر شده و $|a_{i_{l+1}}|, \ldots, |a_{i_k}|$ به صورت مثبت، پس مجموع آن‌ها صفر می‌شود و این تناقض است.

پس به صورت یک‌تا می‌توانیم در پرانتزها پخش کنیم و درنتیجه اعداد اولیه‌مان یک‌تا به دست می‌آیند.
نکته. توجه کنید که عبارت‌های ما یک تابع از اعداد حقیقی مثبت به اعداد حقیقی مثبت هستند و در نتیجه خوش‌تعریف هستند!

راه دوم. (اثبات وجودی، ترکیبیاتی)
ابتدا بزرگ‌ترین عدد و عدد قبلی آن (از نظر بزرگی) را در نظر بگیرید. واضح است که تفاضل این دو کوچک‌ترین قدر مطلق در میان اعداد اولیه‌مان خواهد بود. مجموعه‌ی زیرجمع‌ها به هم‌راه صفر (زیرجمع مجموعه‌ی تهی) را S بگیرید و کوچک‌ترین قدر مطلق را d بنامید.
لم. اگر $S = A \bigcup (A+d) = B \bigcup (B+d)$ آن‌گاه خود A, B برابرند.

اثبات. کوچک‌ترین عدد در S را x بنامید می‌دانیم که x در A آمده، چرا که اگر در $A+d$ آمده باشد آن‌گاه $x-d$ باید در A آمده باشد و درنتیجه در S باید آمده باشد ولی چون $d > 0$ این عدد کم‌تر است و این تناقض است. به طریق مشابه x در B نیز آمده و درنتیجه $x+d$ در $A+d$ و $B+d$ آمده است. حال $x, x+d$ را از S حذف کرده و همین روند را تکرار می‌کنیم نتیجه می‌شود که اعضای A, B دوبه دو با هم مساوی هستند پس $A = B$.

□

حال به اثبات سوال باز می‌گردیم. ثابت می‌کنیم که زیر مجموعه‌ای یک‌تا از زیرجمع‌ها را می‌توان یافت (مانند A) که $S = A \bigcup (A+d)$. در این صورت بنابر استقرا مجموعه‌ی A مجموعه‌ی زیرجمع‌های یک مجموعه‌ی یک‌تای $n-1$

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور
مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

عضوی خواهد بود و مسئله حل می‌شود.

حال فرض کنید در حالتی d عضو مجموعه اعداد اولیه باشد و در حالتی دیگر d عضو مجموعه اعداد اولیه باشد. مجموعه‌ی همه‌ی زیرجمع‌های $n-1$ عدد دیگر را در حالت اول A و در حالت دوم B می‌نامیم. پس $S = A \bigcup (A+d) = B \bigcup (B-d)$. در نتیجه بنا بر لم داریم $A = B - d$. صفر عضو A است پس d باید عضو B باشد. پس مجموع تعدادی از اعداد در حالت دوم d شده است که اگر d را هم به آن‌ها اضافه کنیم مجموع صفر ظاهر می‌شود. تناقض حاصل نشان می‌دهد که مجموعه‌ی مورد نظر یک‌تا است.

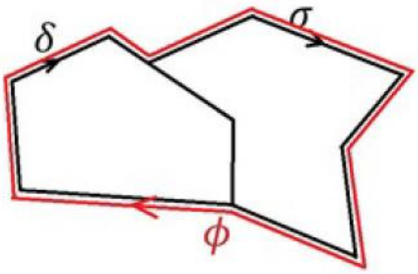
ج. مجموع‌های همه‌ی زیرمجموعه‌های $\{-۳, ۱, ۲\}$ با مجموع‌های همه‌ی زیرمجموعه‌های $\{-۱, -۲, ۳\}$ برابر است. کافی است ۱۳۸۹ تا صفر به هر دو مجموعه اضافه کنیم.

آکادمی تیزلاین، قوی‌ترین پلتفرم آموزشی تیزهوشان
www.tizline.ir

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور
با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور

سؤال شماره ۶. جهان‌گردان سیاره‌ی آب‌دوغ‌خیار!

ابتدا به لم زیبای زیر توجه می‌کنیم که کلید حل سوال است.



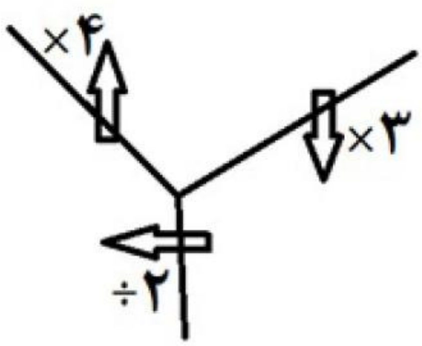
لم. دو دور هم‌جهت δ, σ را در نظر بگیرید که در یک قسمت مشترک باشند، دور ϕ را اجتماع این دو دور و با حذف قسمت‌های مشترک در نظر می‌گیریم. حال اگر در مسیرهای δ, σ جهان‌گرد پس از اتمام یک دور سرمایه‌اش $\kappa_\sigma, \kappa_\delta$ برابر شود، پس از پیمودن مسیر ϕ، سرمایه‌اش $\kappa_\sigma \times \kappa_\delta$ برابر خواهد شد. در واقع داریم: $\kappa_\phi = \kappa_\sigma \kappa_\delta$.

اثبات. توجه کنید که هر یال مسیر ϕ در دقیقاً یکی از مسیرهای δ, σ آمده است. و یال‌هایی از δ, σ که در مسیر ϕ نیامده‌اند در هر دوی این دور مسیر بوده و جهتشان متفاوت است. پس یال‌های مشترک در $\kappa_\sigma \times \kappa_\delta$ یک‌دیگر را خنثی می‌کنند و یال‌های دیگر موجب می‌شوند که رابطه‌ی $\kappa_\phi = \kappa_\sigma \kappa_\delta$ برقرار باشد.

□

حال یک ۱۳۹۲وجهی را در نظر بگیرید. یک رأس دل‌خواه آن را در نظر گرفته و با تصویر نقطه‌ای کل ۱۳۹۲وجهی را به روی یک صفحه انتقال می‌دهیم. توجه کنید که وجوه مجاور رأس مورد نظر به نواحی مانند چندضلعی بی‌نهایت رفته و دیگر وجوه ۱۳۹۲ وجهی و هر خط‌شکسته‌های بسته روی آن ، چندضلعی خواهند ماند.

به هر رأس ضرب یال‌های متصل به آن رأس را در جهت ساعت‌گرد و پادساعت‌گرد نسبت می‌دهیم. برای مثال به رأس شکل زیر، مقدار ساعت‌گرد ۶ و مقدار پادساعت‌گرد $\frac{1}{6}$ را نسبت می‌دهیم. پس اگر دقیقاً یک دور نزدیک و ساعت‌گرد دور این رأس بزنیم، سرمایه‌یمان ۶ برابر می‌شود.

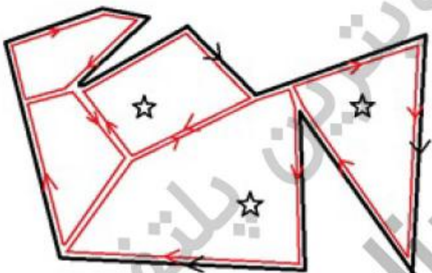


حال ادعا می‌کنیم که κ هر مسیر تنها به مقادیر رئوس درون آن مسیر بستگی دارد. برای اثبات ابتدا توجه می‌کنیم که هر مسیری که درون خود هیچ رأسی نداشته باشد، دارای κ برابر یک است. با در نظر گرفتن هر پاره‌خط و امتداد آن می‌توان به سادگی این نکته را ثابت کرد که هر مسیری که درون خود رأسی ندارد، پاره‌خط را به اندازه‌ی برابر از دو طرف قطع می‌کند.

آکادمی تیزلاین، قوی‌ترین پلتفرم آموزشی تیزهوشان
www.tizline.ir

به عنوان لم دوم به این نکته توجه کنید که اگر مسیری دل‌خواه با ضریب نهایی κ داشته‌باشیم، می‌توان این مسیر را از هر کشور دل‌خواه شروع کرد برای اثبات کافی‌است مسیری بسته که از کشور مورد نظر می‌گذرد و یال مشترکی با مسیر اصلی دارد و هیچ رأسی درونش نیست را به مسیر اصلی اضافه کنیم. طبق لم اول این کار مسیر مناسب با ضریب κ به ما خواهد داد.

اکنون با استفاده از این نکته می‌توان اثبات این قسمت را کامل کرد. یک مسیر ساعت‌گرد را در نظر بگیرید. دور رئوس این مسیر دورهایی مجزا و نزدیک به رأس رسم می‌کنیم. باقی مسیر را نیز با دورهای خالی از رأس می‌پوشانیم. اکنون توجه کنید که κ این دورهای خالی از رأس برابر واحد است و κ دورهای شامل یک رأس و نزدیک به آن برابر مقدار ساعت‌گرد این رأس است. با توجه به لم کلیدی ابتدای سوال و استفاده از استقرا می‌توان ادعا کرد که κ مسیر اصلی برابر ضرب مقادیر ساعت‌گرد درون مسیر است.

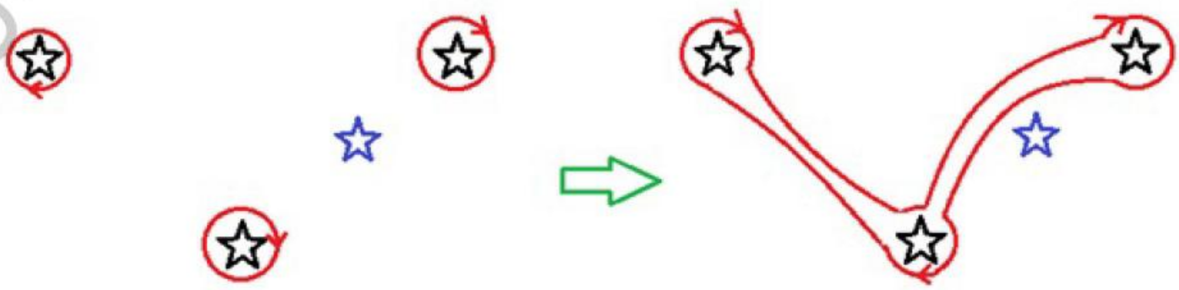


پس κ هر مسیر را که در نظر بگیریم با توجه به این که ساعت‌گرد یا پادساعت‌گرد است، برابر حاصل‌ضرب تعدادی مقدار ساعت‌گرد یا پادساعت‌گرد رئوس است. پس برای هر زیرمجموعه از رئوس حداکثر دو مسیر ساعت‌گرد و یا پادساعت‌گرد شامل این رئوس داریم. با توجه به این که مسیر خالی از رأس دارای κ یک است پس این مسیر حداکثر یک κ به ما می‌دهد. پس در کل حداکثر می‌توان $2^v - 1$ تا κ متمایز تولید داشت که v تعداد رئوس در صفحه است.

حال ثابت می‌کنیم که این تعداد مسیر با رئوس درونی متمایز وجود دارد.

ابتدا توجه کند که برای $= \kappa$ مسیر وجود دارد.

برای ادامه کار نشان می‌دهیم که برای هر زیرمجموعه‌ی ناتهی از رئوس صفحه و هر جهت‌گذاری (ساعت‌گرد یا پادساعت‌گرد) می‌توان مسیری شامل این رئوس و با جهت دل‌خواه پیدا کرد. برای این کار دور رئوسی که قرار است درون دور باشند دورهای کوچکی رسم کرده و این دورها را مانند شکل با هم تلفیق می‌کنیم تا مسیر مناسب به دست آید.



حال کافی است نشان دهیم می‌توان مرزها را طوری عدد گذاری کرد که هر دو مسیر با رئوس درون متمایز، دارای κ متمایز باشند. برای این کار روی مرزها اعداد اول متمایز قرار می‌دهیم. فرض کنید دو مسیر با رئوس درونی متمایز، κی برابر

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور
مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

راه‌حل آزمون خلاقیت ۱۳۹۲

داشته باشند. اگر هر دو دور جهت برابر داشته باشند، با استفاده از لم اول می‌توان تعدادی رأس یافت که ضرب مقدار آن‌ها (تعدادی ساعت‌گرد و تعدادی پادساعت‌گرد) برابر یک باشد که به سادگی می‌توان این را رد کرد. اگر هم یکی ساعت‌گرد و دیگری پادساعت‌گرد باشد، می‌توان ادعا کرد که این دو مسیر مکمل یک‌دیگرند و با توجه به این که هیچ کدام تهی نیستند به سادگی می‌توان به تناقض رسید. پس همواره انتخاب رأس‌های متمایز و جهت متمایز κی متمایزی به ما می‌دهد.

پس با توجه به آن چه گفته شد می‌توان ادعا کرد که حداکثر تعداد κهای متمایز برابر $2^v - 1$ خواهد بود. پس برای ماکزیمم شدن این تعداد کافی است تعداد رئوس در صفحه ماکزیمم شوند که با دو بار محاسبه‌ی زوایای چندضلعی‌ها (هر رأس زاویه‌ی ۳۶۰ درجه دارد و هر چندضلعی (متناهی و نامتناهی) زاویه‌ی حداقل ۱۸۰ درجه) به این نتیجه می‌رسیم که تعداد رئوس روی صفحه حداکثر برابر $2 \times 1392 - 5$ است. در حین اثبات به این نتیجه می‌رسیم که حالت تساوی تنها وقتی رخ می‌دهد که تمام رئوس درجه ۳ باشند و این ما را در ساخت حالت تساوی کمک خواهد کرد. این تعداد رأس در صفحه وقتی به دست می‌آید که در فضا $2 \times 1392 - 4$ رأس داشته باشیم.

حال توجه کنید این حالت امکان دارد رخ دهد. کافی است یک منشور در نظر بگیرید که دو قاعده‌ی آن ۱۳۹۰ضلعی و وجوه جانبی آن مستطیل‌هایی باشند. این چندوجهی محدب است، ۱۳۹۰ وجه دارد و $2 \times 1392 - 4$ رأس دارد.

پس بیشینه‌ی خواسته شده توسط سوال برابر $2^v - 1$ است و برای آن مثال هم داریم.

آکادمی تیزلاین، قدرتمندترین پلتفرم آموزشی تیزهوشان www.tizline.ir
مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور
با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور

آکادمی آموزشی تیزلاین

سؤال شماره ۷. خواص جالب معادلات جالب!

الف. دقت کنید که برای هر x ثابت، حداکثر تعدادی متناهی عضو S هستند که مؤلفه‌ی اولشان x باشد. بنابراین برای هر عدد مثبت R، حداکثر تعداد متناهی از اعضای S هستند که مؤلفه‌ی اول آن‌ها از R کم‌تر باشد. مشابهاً برای مؤلفه‌ی دوم هم این گزاره برقرار است.

فرض کنید $P_\circ(x) = Q_\circ(y)$ معادله‌ای جالب با کم‌ترین درجه باشد که در بی‌نهایت نقطه از S صدق می‌کند (منظور از درجه‌ی معادله‌ی $P(x) = Q(y)$، درجه‌ی $P(x) - Q(y)$ به عنوان یک چندجمله‌ای دو متغیره است). مجموعه نقاطی که این معادله در آن صدق می‌کند را S' بنامید. $P(x) = Q(y)$ را معادله‌ی دل‌خواهی فرض کنید که در S صدق می‌کند. اکنون P را بر $P_\circ$ و Q را بر $Q_\circ$ تقسیم چندجمله‌ای می‌کنیم، داریم:

$$P(x) = A(x)P_\circ(x) + B(x)$$
$$Q(y) = C(y)Q_\circ(y) + D(y)$$

به طوری که A، B، C و D چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب گویا هستند و $\deg B < \deg P_\circ$ و $\deg D < \deg Q_\circ$. عدد صحیح N را طوری بگیرید که وقتی در این چندجمله‌ای‌ها ضرب می‌شود همه‌ی ضرایب صحیح شوند. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} NP(x) &= A'(x)P_\circ(x) + B'(x) \\ NQ(y) &= C'(y)Q_\circ(y) + D'(y) \end{aligned} \quad (*)$$

به طوری که A'، B'، C' و D' چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب صحیح هستند.

اگر $(x_\circ, y_\circ) \in S'$، می‌دانیم که $P(x_\circ) = Q(y_\circ)$ برابر عددی صحیح مانند a و $P_\circ(x) = Q_\circ(y)$ برابر عددی صحیح مانند b است. اکنون اگر دو معادله‌ی $(*)$ را از هم کم کنیم، به دست می‌آوریم:

$$(A'(x_\circ) - C'(y_\circ))b = B'(x_\circ) - D'(y_\circ) \quad (**)$$

از طرفی می‌دانیم که $\deg B' < \deg P_\circ$ و $\deg D' < \deg Q_\circ$. بنابراین عدد مثبت R وجود دارد که اگر $|x|, |y| > R$، آن‌گاه:

$$|B'(x)| < \frac{|P_\circ(x)|}{2}, \quad |D'(y)| < \frac{|Q_\circ(y)|}{2}$$

در نتیجه اگر $|x_\circ|, |y_\circ| > R$ بنابر نابرابری مثلث، $|B'(x) - D'(y)| < b$ در حالی که از معادله‌ی $(**)$ نتیجه می‌شود که باید بر b بخش‌پذیر باشد، پس $B'(x_\circ) - D'(y_\circ) = 0$ و در نتیجه $A'(x_\circ) - C'(y_\circ) = 0$، یعنی $(x_\circ, y_\circ)$ جوابی از $B'(x) = D'(y)$ نیز هست. از طرفی بنابر توضیحی که در ابتدا دادیم، به جز متناهی عضو برای بقیه‌ی اعضا داریم $|x|, |y| > R$. پس معادله‌ی $B'(x) = D'(y)$ نیز بی‌نهایت جواب در S دارد و در عین حال درجه‌اش از معادله‌ی $P_\circ(x) = Q_\circ(y)$ کم‌تر است. بنابر این تنها حالت ممکن این است که B' و D' ثابت (و برابر) باشند، یعنی $B'(x) = D'(y) = c$.

بنابراین داریم $A'(x) = \frac{NP(x)-c}{P_\circ(x)}$ ، $C'(y) = \frac{NQ(y)-c}{Q_\circ(y)}$. حال اگر معادله‌ی $A'(x) = C'(y)$ هنوز یک معادله‌ی جالب باشد، A' را بر $P_\circ$ و C' را بر $Q_\circ$ تقسیم کرده و استدلال بالا را تکرار می‌کنیم. با ادامه‌ی این کار نتیجه می‌شود که چندجمله‌ای $F(x)$ با ضرایب گویا وجود دارد که $P(x) = F(P_\circ(x))$ و $Q(y) = F(Q_\circ(y))$. یعنی معادله‌ی $P(x) = Q(y)$ از $P_\circ(x) = Q_\circ(y)$ نتیجه می‌شود.

mathmovie6 Tizline.ir

www.Tizline.ir @tizline ۰۹۳۳ ۳۸۴ ۰۲۰۲ ۵۰۰۰۲۶۹۱۳۲۴ ۰۲۱۹۱۳۰۲۲۰۲

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور

www.tizline.ir آکادمی تیزلاین برترین پلتفرم آموزشی تیزهوشان

ب. از لم زیر برای اثبات حکم استفاده می‌کنیم.

لم. اگر $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ تکین باشد و $\deg P = dm$ ،$d|$ آن‌گاه وجود دارند عدد صحیح N و چندجمله‌ای‌های $T(x)$ و $R(x)$ با ضرایب صحیح به طوری که: $NP(x) = (T(x))^d + R(x)$، و برای x به اندازه‌ی کافی بزرگ، $T(x)^d \le NP(x) < (T(x)+1)^d$

اثبات. ابتدا چندجمله‌ای $T_1(x)$ را طوری میابیم که $P(x) - T_1(x)^d$ از درجه‌ی کم‌تر از $(m-1)d$ باشد. برای این کار فرض کنید:

$$P(x) = x^{md} + a_{md-1}x^{md-1} + \cdots + a_0$$

و قرار دهید $T_1(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0$ کافی است ضرایب $b_0, \dots, b_{m-1}$ را طوری بیابیم که:

$$(x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0)^d = x^{md} + a_{md-1}x^{md-1} + \cdots + a_{md-d}x^{md-d} + c_{md-d-1}x^{md-d-1} + \cdots$$

ضرایب را می‌توان به طور بازگشتی تعیین کرد و T_1 را به دست آورد. $\square$

ضرایب T_1 اعدادی گویا می‌شوند. سپس می‌توان با ضرب کردن عدد صحیح n همه‌ی ضرایب را صحیح کرد. بنابراین $T_2(x) = nT_1(x)$ و $NP(x) - T_2(x)^d = S_2(x)$ که در آن $N = n^d$ و $\deg S_2 < (m-1)d$. حال اگر ضریب پیشروی S_2 مثبت بود، مسأله حل است و اگر منفی بود قرار می‌دهیم: $T(x) = T_2(x) - 1$ و $S(x) = NP(x) - T(x)$.

اکنون به مسأله اصلی باز می‌گردیم. فرض خلف می‌کنیم. فرض کنید $d|(\deg P, \deg Q)$. بنابر لم بالا، عدد صحیح N و چندجمله‌ای‌های T ، R ، U و V با ضرایب صحیح وجود دارند به طوری که:

$$NP(x) = (T(x))^d + R(x), \quad NQ(y) = (U(y))^d + V(y)$$

و برای x و y به اندازه‌ی کافی بزرگ،

$$T(x)^d \le NP(x) < (T(x)+1)^d, \quad U(y)^d \le NQ(y) < (U(y)+1)^d$$

اکنون هرگاه $P(x) = Q(y)$، از رابطه‌ی بالا نتیجه می‌شود که $T(x) = U(y)$. پس این دو معادله‌ی جالب، بی‌نهایت جواب مشترک دارند و در نتیجه بنابر قسمت (الف) هر دو توسط یک معادله تولید می‌شوند.

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور
با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور
آکادمی آموزشی تیزلاین، فوق‌ترین پلتفرم آموزشی تیزهوشان www.tizline.ir

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور

سؤال شماره ۸. پنج‌ضلعی گویا!

قبل از اثبات حکم چند نکته‌ی لازم را متذکر می‌شویم:

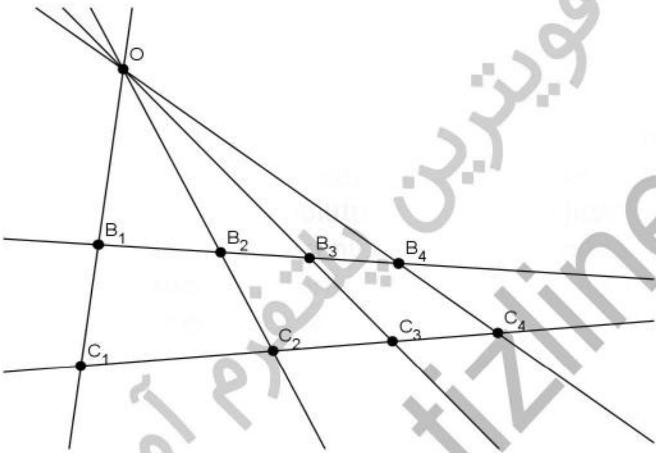
نکته ۱. اگر B_1، B_2، B_3 و B_4 چهار نقطه روی یک خط باشند، نسبت «ناهمساز» آن‌ها به این صورت تعریف می‌شود:

$$(B_1B_2, B_3B_4) = \frac{|B_1B_3|}{|B_1B_4|} / \frac{|B_2B_3|}{|B_2B_4|}$$

(در این تعریف یک جهت برای خط گذرا از B_iها در نظر گرفته می‌شود و طول هر پاره‌خط بسته به این‌که هم جهت با جهت خط یا خلاف آن باشد، مثبت یا منفی در نظر گرفته می‌شود.)

مهم‌ترین خاصیت نسبت ناهمساز چهارتایی‌ها، ناوردا بودن آن نسبت به تصویر از یک کانون روی خط دیگر است:

$$(B_1B_2, B_3B_4) = (C_1C_2, C_3C_4).$$



روابط زیر را می‌توان با اندکی محاسبه از تعریف نسبت ناهمساز به دست آورد: (B_iها نقاطی هم‌خط هستند.)

رابطه‌ی (۱) $$(B_1B_2, B_3B_4) = (B_3B_4, B_1, B_2)$$

رابطه‌ی (۲) $$(B_1B_4, B_3B_2) = \frac{(B_1B_2, B_3B_4)}{(B_1B_2, B_3B_4) - 1}$$

رابطه‌ی (۳) $$(B_1B_2, B_3B_4)(B_1B_2, B_4B_5) = (B_1B_2, B_3B_5)$$

نکته ۲. اگر (x_1, y_1) و (x_2, y_2) دو نقطه با مختصات گویا در صفحه باشند، معادله‌ی خط گذرنده از آن‌ها به صورت:

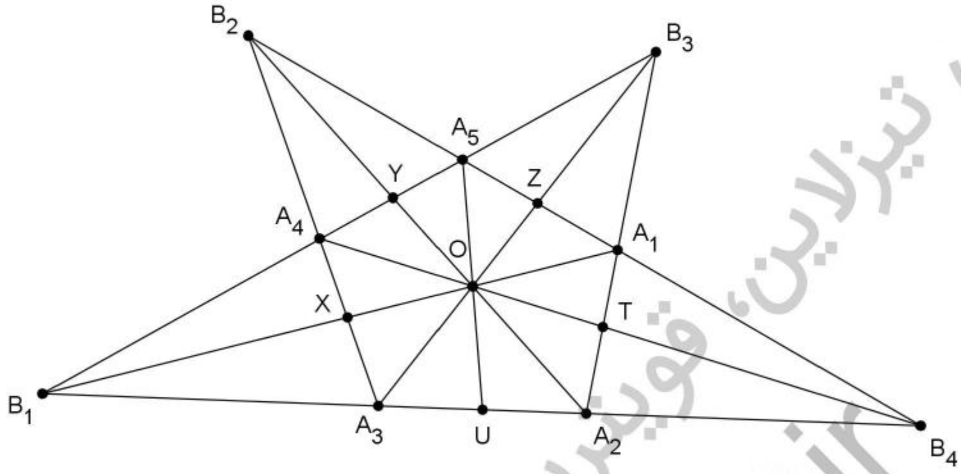
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

است. در نتیجه معادله‌ی این خط را نیز می‌توان با اعداد گویا بیان کرد؛ به چنین خطی «گویا» می‌گوییم. به راحتی می‌توان دید که تقاطع دو خط گویا، نقطه‌ای گویاست و نسبت فواصل نقاط گویا روی یک خط، عددی گویاست. علی‌الخصوص نسبت ناهمساز چهار نقطه‌ی گویای هم‌خط، گویاست.

حال به سراغ اثبات حکم مسأله با استفاده از برهان خلف می‌رویم. فرض کنید $A_1 \dots A_5$ یک پنج‌ضلعی گویا باشد که برای آن، چهار تا از خطوط A_iB_i مثل $A_1B_1, \dots, A_4B_4$ در نقطه‌ای مانند O هم‌رسند. با توجه به گویا بودن A_iها، خطوط واصل آن‌ها و تقاطع‌های این خطوط همگی گویا هستند. در نتیجه همه‌ی نقاطی که در شکل نام‌گذاری شده‌اند و همه‌ی نسبت‌های ناهمسازی که با آن‌ها ساخته می‌شوند، گویا هستند.

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور



نسبت ناهمساز (B_1A_3, A_2B_4) را λ می‌نامیم. با توجه به شکل بالا داریم:

$$\lambda = (B_1A_3, A_2B_4) = (B_1A_4, YA_5) \ (\text{تصویر از } B_2)$$
$$\lambda = (B_1A_3, A_2B_4) = (B_1B_4, A_2U) \ (\text{تصویر از } O)$$

همین‌طور:

$$\lambda = (B_1A_3, A_2B_4) = (A_5Z, A_1B_4) \ (\text{تصویر از } B_3)$$
$$= (UA_3, B_1B_4) \ (\text{تصویر از } O)$$
$$= (B_1B_4, UA_3) \ (\text{رابطه‌ی (۱)})$$

درنتیجه با توجه به روابط (۲) و (۳):

$$\lambda^2 = (B_1B_4, A_2U)(B_1B_4, UA_3) = (B_1B_4, A_2A_3) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

پس λ یکی از ریشه‌های معادله‌ی $X^2 = X + 1$ است که ریشه‌ی گویا ندارد! پس هم‌رسی چهارتا از خطوط A_iB_i با گویا بودن پنج‌ضلعی $A_1A_2A_3A_4A_5$ سازگار نیست.

آکادمی تیزلاین، قوی‌ترین پلتفرم آموزشی تیزهوشان www.tizline.ir

آکادمی تیزلاین

برگزار می کند:

www.tizline.ir
۰۲۱۴۴۱۳۶۹۷۵

دوره سالانه

تخفیف ویژه برای تیزلاینی ها

دکتر رضا رحمت اله زاده

کلاس آنلاین المپیاد
شیمی (سطح یک)

شنبه‌ها ۲۰ تا ۲۱:۱۵
شروع از ۲۲ آبان

۱۵ جلسه
۶۰۰ هزار تومان

دکتر افشین بهمرام

کلاس آنلاین المپیاد
ریاضی (سطح یک)

یکشنبه‌ها ۲۰ تا ۲۱:۱۵
شروع از ۲۳ آبان

۱۵ جلسه
۶۰۰ هزار تومان

دکتر میثم کوهگرد

کلاس آنلاین المپیاد
فیزیک (سطح یک)

پنجشنبه‌ها ۱۸:۱۵ تا ۱۹:۳۰
شروع از ۲۷ آبان

۱۵ جلسه
۶۰۰ هزار تومان

دکتر قربانی

کلاس آنلاین المپیاد
زیست شناسی (سطح یک)

سه‌شنبه‌ها ۱۸:۱۵ تا ۱۹:۳۰
شروع از ۲۵ آبان

۱۵ جلسه
۶۰۰ هزار تومان

دکتر میثم کوهگرد

کلاس آنلاین المپیاد
فیزیک (سطح دو)

پنجشنبه‌ها ۲۰ تا ۲۱:۱۵
شروع از ۲۷ آبان

۲۰ جلسه
۸۰۰ هزار تومان

دکتر قربانی

کلاس آنلاین المپیاد
زیست شناسی (سطح دو)

سه‌شنبه‌ها ۲۰ تا ۲۱:۱۵
شروع از ۲۵ آبان

۲۰ جلسه
۸۰۰ هزار تومان

#تیزلاینی_شو

ثبت نام در سایت رسمی
tizline.ir
www.tizline.ir

۰۹۳۳-۳۸۴ ۰۲۰۲

۰۲۱-۹۱۳۰۲۲۰۲

مجری همایش کلاس و آزمون در سراسر کشور

با حضور اساتید برگزیده ی کشوری تیزهوشان و کنکور

تقویم آموزشی آکادمی تیزلاین

سال ۱۴۰۱-۱۴۰۰

#تیزلاینی_شو

ترم تابستان	ترم یک دوره سالانه	ترم دو دوره سالانه
آغاز ثبت نام: ۱۰ خرداد	آغاز ثبت نام: ۱ شهریور	آغاز ثبت نام: ۱ دی
شروع دوره: ۱۲ تیر	شروع دوره: ۱۰ مهر	شروع دوره: ۱ بهمن
پایان دوره: ۲۰ شهریور	پایان دوره: ۱۸ دی	پایان دوره: ۲۵ اردیبهشت
۱۰ جلسه	۱۵ جلسه	۱۵ جلسه

آنلاین تخصص ماست

کلاس ، آزمون ، مشاوره ، تکلیف

ثبت نام در سایت رسمی آکادمی تیزلاین www.Tizline.ir

آزمون های هماهنگ از ۲۵ مهر تا ۱۱ اردیبهشت